پاسخنامه تشریحی

۱

$a_n = 1, 4, 7, 10, \cdots \quad d = 3$

$b_n = -5, -1, 3, 7, \cdots \quad d' = 4$

دنبالهٔ جملات مشترک، دنباله ای حسابی با جملهٔ اول ۷ و قدر نسبت $d = 3 \times 4 = 12$ است، پس داریم:

$$c_1 = 7\ ,\ d'' = 12 \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2c_1 + (n-1)d) = 610 \Rightarrow \frac{n}{2}(14 + (n-1) \times 12) = 610$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(12n + 2) = 610 \Rightarrow 6n^2 + n - 610 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4 \times 6 \times 610 = 14641$$

$$n = \frac{-1 \pm 121}{12} \Rightarrow \begin{cases} n = -\frac{122}{12} & \text{غ ق ق} \\ n = 10 \end{cases}$$

۲ دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید $3 + 3 = 6$ متر طی کند، برای توپ دوم باید $6 + 6 = 12$ متر و برای توپ سوم $9 + 9 = 18$ متر و... طی کند. پس داریم:

دنباله‌ی مسافت‌ها: $6, 12, 18, \cdots \quad a_1 = 6,\ d = 6$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = 918 \Rightarrow \frac{n}{2}(12 + 6n - 6) = 918$$

$$3n(n+1) = 918 \rightarrow \underbrace{n(n+1)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}} = 306 = \underbrace{17 \times 18}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}} \Rightarrow n = 17$$

۳ فرض کنیم a_n جمله عمومی دنباله‌ی حسابی باشد. بنابراین:

$$a_4, a_6, a_{12}\ \text{دنباله‌ی هندسی} \Rightarrow a_6^2 = a_4 \times a_{12}$$

$$\Rightarrow (a_1 + 5d)^2 = (a_1 + 3d)(a_1 + 11d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 10a_1d + 25d^2 = a_1^2 + 14a_1d + 33d^2 \Rightarrow -4a_1d = 8d^2 \Rightarrow a_1 = -2d$$

$$q = \frac{a_6}{a_4} = \frac{a_1 + 5d}{a_1 + 3d} = \frac{-2d + 5d}{-2d + 3d} = 3$$

یادآوری: اگر a و b و c تشکیل دنباله هندسی بدهند داریم:

$$b^2 = ac$$

۴ فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله باشند.

$$\begin{array}{l} 2x^2 - 8x + m = 0 \Rightarrow \\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-8)}{2} = 4 \Rightarrow \end{array} \begin{cases} \alpha = \beta - 2 \\ \alpha + \beta = 4 \end{cases} \Longrightarrow 2\beta - 2 = 4 \Rightarrow \beta = 3\ ,\ \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \alpha\ \beta = 3 \times 1 = \frac{c}{a} = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 6$$

۵

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\ ,\ x_2 = kx_1 \Rightarrow x_1 + kx_1 = -\frac{b}{a} \Rightarrow (1+k)x_1 = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{b}{a(k+1)} \Rightarrow x_2 = \frac{-kb}{a(k+1)} \Rightarrow x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{kb^2}{a^2(k+1)^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow akb^2 = a^2c(k+1)^2 \Rightarrow kb^2 = a \cdot c(k+1)^2 \Rightarrow \frac{(k+1)^2}{k} = \frac{b^2}{a \cdot c}$$

۶

$$x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow \text{جمع ریشه‌ها} : S = \frac{-b}{a}\alpha + \beta = -1\ ,\quad \text{ضرب ریشه‌ها} : P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -3$$

$$\Rightarrow \text{جدید}\ S' = \alpha^2 + \frac{1}{\beta} + \beta^2 + \frac{1}{\alpha} = \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = S^2 - 2P + \frac{S}{P} = 1 - 2(-3) + \frac{-1}{-3}$$

$S'_{\text{جدید}} = ۷ + \frac{۱}{۳} = \frac{۲۲}{۳}$

$P'_{\text{جدید}} = (\alpha^۲ + \frac{۱}{\beta})(\beta^۲ + \frac{۱}{\alpha}) = (\alpha\beta)^۲ + \alpha + \beta + \frac{۱}{\alpha\beta} = P^۲ + S + \frac{۱}{P} = ۹ - ۱ + \frac{۱}{-۳}$

$\Rightarrow P'_{\text{جدید}} = ۸ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲۳}{۳}$

$\Rightarrow x^۲ - S'x + P' = ۰ \Rightarrow x^۲ - \frac{۲۲}{۳}x + \frac{۲۳}{۳} = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۲۲x + ۲۳ = ۰$

۷ بیشترین مقدار تابع یعنی عرض نقطه‌ی ماکزیمم تابع پس داریم:

$y_{\max} = -\frac{\Delta}{۴a} = -۱ \to \Delta = ۴a \Rightarrow ۱ - ۴ \times a \times ۲ = ۴a \Rightarrow ۱ = ۱۲a \to a = \frac{۱}{۱۲}$

چون تابع ماکزیمم دارد، پس باید $a < ۰$ باشد پس $a = \frac{۱}{۱۲}$ غیرقابل قبول است و مسئله جواب ندارد.

۸ می‌دانیم محل تلاقی نمودار تابع با محور xها ریشه‌های تابع هستند. از طرفی چون دهانه‌ی سهمی رو به بالا است پس $a > ۰$ می‌باشد. بنابراین جدول تعیین علامت بصورت زیر است:

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
$f(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

حال ضرایب a, b, c را از دو روش تعیین می‌کنیم.

روش اول:

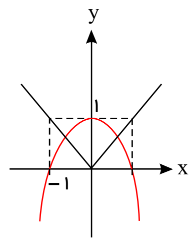
$$f(x) = ax^۲ + bx + c \Rightarrow \begin{cases} f(۰) = -۲ \Rightarrow c = -۲ \\ f(۱) = ۰ \Rightarrow a + b - ۲ = ۰ \\ f(-۲) = ۰ \Rightarrow ۴a - ۲b - ۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۲ \\ ۴a - ۲b = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۱ \end{cases}$$

روش دوم: چون $x = -۲$ و $x = ۱$ ریشه‌های معادله هستند، بنابراین معادله بصورت $f(x) = a(x + ۲)(x - ۱)$ می‌باشد. از طرفی $f(۰) = -۲$ است، بنابراین:

$a(۰ + ۲)(۰ - ۱) = -۲ \to -۲a = -۲ \Rightarrow a = ۱$

بنابراین $f(x) = x^۲ + x - ۲$ می‌باشد. در نتیجه $b = ۱$ و $c = -۲$ می‌باشد.

۹ $f(x) = ۱ - x^۲ \quad , \quad g(x) = |x|$



$\to$ معادله ۲ ریشه‌ی قرینه‌ی هم دارد

۱۰

$\frac{۶}{x} = ۲ + \frac{x - ۳}{x + ۱} \xrightarrow{\times x(x+۱)} ۶(x + ۱) = ۲x(x + ۱) + x(x - ۳)$

$۶x + ۶ = ۲x^۲ + ۲x + x^۲ - ۳x \Rightarrow ۳x^۲ - ۷x - ۶ = ۰$

$\Delta = ۴۹ - ۴ \times ۳ \times (-۶) = ۴۹ + ۷۲ = ۱۲۱ \Rightarrow x = \frac{۷ \pm ۱۱}{۶} \Rightarrow x = ۳ \quad , \quad x = -\frac{۲}{۳}$

هر دو ریشه قابل قبول هستند.

۱۱

$\sqrt{x + ۳} + \sqrt{۳x + ۱} = ۴ \Rightarrow \sqrt{۳x + ۱} = ۴ - \sqrt{x + ۳}$

$\text{توان ۲} \Rightarrow ۳x + ۱ = ۱۶ + x + ۳ - ۸\sqrt{x + ۳} \Rightarrow ۸\sqrt{x + ۳} = -۲x + ۱۸$

$\Rightarrow ۴\sqrt{x + ۳} = ۹ - x \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱۶(x + ۳) = ۸۱ - ۱۸x + x^۲$

$\Rightarrow x^۲ - ۱۸x + ۸۱ - ۱۶x - ۴۸ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۳۴x + ۳۳ = ۰$

جمع ضرایب $=0 \Rightarrow x=1 \quad , \quad x=\frac{c}{a}=33$

$x=1 \xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{امتحان}} \sqrt{4}+\sqrt{4}=4 \Rightarrow 2+2=4 \Rightarrow x=1$ قابل قبول

$x=33 \xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{امتحان}} \sqrt{36}+\sqrt{100}=4 \Rightarrow 6+10=4$ غلط $\Rightarrow x=33$ غیرقابل قبول

۱۲

$$\frac{5}{\sqrt{x}+2}=2-\frac{1}{\sqrt{x}-2} \xrightarrow{\times(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} 5(\sqrt{x}-2)=2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)-(\sqrt{x}+2)$$

$$5\sqrt{x}-10=2(x-4)-\sqrt{x}-2 \Rightarrow 2x-8-\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}+10=0$$

$$2x-6\sqrt{x}=0 \Rightarrow x=3\sqrt{x} \Rightarrow x^2=9x \Rightarrow x(x-9)=0 \Rightarrow x=0 \quad , \quad x=9$$

$x=0 \Rightarrow \frac{5}{2}=2-\frac{1}{-2} \Rightarrow \frac{5}{2}=2+\frac{1}{2} \checkmark \Rightarrow x=0$ قابل قبول

$x=9 \Rightarrow \frac{5}{5}=2-\frac{1}{3-2} \Rightarrow 1=2-1 \checkmark \Rightarrow x=9$ قابل قبول

۱۳

$$f(x)=|x+1|+|x-1| \qquad \begin{matrix} x+1=0 & \Rightarrow & x=-1 \\ x-1=0 & \Rightarrow & x=+1 \end{matrix}$$

x		-1		$+1$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$

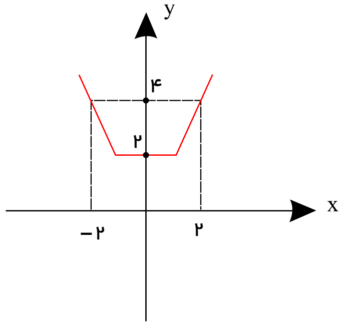
$$f(x)=\begin{cases} -x-1-x+1 & x<-1 \\ x+1-x+1 & -1\le x\le 1 \\ x+1+x-1 & x>1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -2x & x<-1 \\ 2 & -1\le x\le 1 \\ 2x & x>1 \end{cases}$$

x	-1	-2
y	2	4

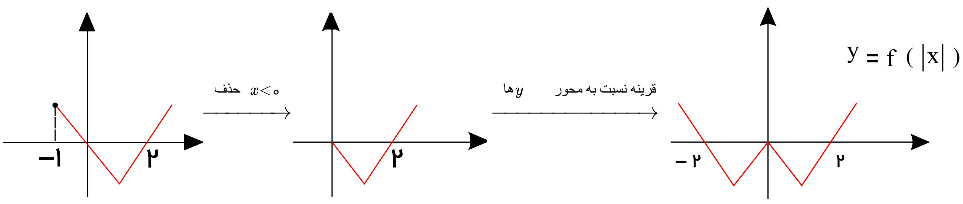
x	-1	1
y	2	2

x	1	2
y	2	4

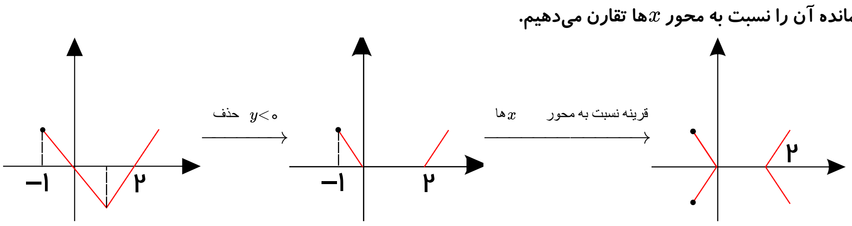
$$R_f=[2,+\infty)$$



۱۴ برای رسم $y=f(|x|)$ ابتدا $x<0$ را حذف کرده سپس قسمت باقیمانده آن را نسبت به محور yها تقارن می‌دهیم.



برای رسم $|y|=f(x)$ ابتدا $y<0$ را حذف کرده سپس قسمت باقیمانده آن را نسبت به محور xها تقارن می‌دهیم.



۱۵

$$|2x|<|x-1|+|x+1| \Rightarrow a=x-1, b=x+1 \Rightarrow a+b=2x$$

$\Rightarrow |a+b| < |a|+|b| \Rightarrow a\cdot b < ۰ \Rightarrow (x-۱)(x+۱) < ۰ \Rightarrow x^۲ - ۱ < ۰$

$x^۲ < ۱ \Rightarrow -۱ < x < ۱$

نکته: نامساوی $|a+b| < |a|+|b|$ زمانی برقرار است که $ab < ۰$ باشد.

۱۶ طرفین را در عبارت مثبت $|x|+۲$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{x^۲ - |x|}{|x|+۲} \le ۲ \xrightarrow{\times |x|+۲} x^۲ - |x| \le ۲|x| + ۴ \Rightarrow x^۲ - ۳|x| - ۴ \le ۰$$

$$\Rightarrow |x|^۲ - ۳|x| - ۴ \le ۰ \Rightarrow (|x|-۴)\underbrace{(|x|+۱)}_{\text{همواره مثبت}} \le ۰ \Rightarrow |x| - ۴ \le ۰ \Rightarrow |x| \le ۴ \Rightarrow -۴ \le x \le ۴$$

۱۷

$|x| < ۲ \quad \Rightarrow \quad -۲ < x < ۲ \qquad (I)$

$|۲x - ۳| < x \quad \Rightarrow \quad x \ge ۰ \qquad (III)$

$\xrightarrow{\text{توان}۲} (۲x-۳)^۲ < x^۲ \quad \Rightarrow \quad ۴x^۲ + ۹ - ۱۲x < x^۲ \Rightarrow ۳x^۲ - ۱۲x + ۹ < ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۳ < ۰$

$(x-۳)(x-۱) < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۱ < x < ۳\,(II)$

$I \cap II \cap III \quad \Rightarrow \quad ۱ < x < ۲$

۱۸ خط $۴y - ۳x = -۱$ را با نیمساز ربع اول و سوم یعنی $y = x$ قطع می‌دهیم. نقطه‌ی برخورد باید در خط دوم صدق کند.

$$\begin{cases} ۴y - ۳x = -۱ \\ y = x \end{cases} \Rightarrow ۴x - ۳x = -۱ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow y = -۱$$

$A(-۱,-۱) \Rightarrow (۲a-۱)x + (a+۲)y = ۲ \Rightarrow -۲a + ۱ - a - ۲ = ۲$

$\Rightarrow -۳a = ۳ \Rightarrow \boxed{a = -۱}$

۱۹

$$ax + ۴y - ۱ = ۰ \Rightarrow \frac{|a + ۸ - ۱|}{\sqrt{a^۲ + ۱۶}} = ۲ \Rightarrow |a + ۷| = ۲\sqrt{a^۲ + ۱۶}$$

$$\Rightarrow a^۲ + ۱۴a + ۴۹ = ۴a^۲ + ۶۴ \Rightarrow ۳a^۲ - ۱۴a + ۱۵ = ۰$$

$$\Delta = ۱۹۶ - ۴ \times ۳ \times ۱۵ = ۱۶ \to a = \frac{۱۴ \pm ۴}{۶} \Rightarrow a = ۳,\ \frac{۵}{۳}$$

۲۰ نقطهٔ دلخواهی روی خط $ax + by + c = ۰$ در نظر گرفته و فاصلهٔ آن را تا خط $ax + by + c' = ۰$ به‌دست می‌آوریم.

$$ax + by + c = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow by + c = ۰ \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$$

$$A = (۰, -\frac{c}{b}) \Rightarrow \text{فاصله } A \text{ تا خط} = \frac{|۰ + b(-\frac{c}{b}) + c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|-c + c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$