پاسخنامه تشریحی

۱

$$g(x)=\sqrt{(3-x)f(x)} \Rightarrow (3-x)f(x)\geq 0$$

با توجه به نمودار f ، تعیین علامت آن به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		-3		-1		2		3		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$3-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(3-x)f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$-3\leq x\leq -1$ یا $2\leq x\leq 3$ یا $x\geq 4$

$$D_f=[-3,-1]\cup[2,3]\cup[4,+\infty)$$

۲

$$f(x)=\frac{\sqrt{x(x^2-1)}}{\sqrt{x+|x|}}$$

$(I)\ x+|x|>0 \Rightarrow |x|>-x \Rightarrow x>0$

x		-1		0		1	
$x\cdot(x^2-1)\geq 0$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$(II)\ x(x^2-1)\geq 0 \Rightarrow -1\leq x\leq 0 \cup x\geq 1$

$(I)\cap(II)=[1,+\infty)$

۳

$$f(x)=0 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

$g(x)=[\frac{x^2}{x^2+1}]\ ,\ x^2+1=0 \Rightarrow$ ریشه ندارد. $\Rightarrow D_g=\mathbb{R}=D_f$

با فرض $t=\frac{x^2}{x^2+1}$ داریم:

$$x^2=x^2t+t \Rightarrow x^2(1-t)=t \Rightarrow x^2=\frac{t}{1-t}$$

می‌دانیم: $x^2\geq 0 \Rightarrow \frac{t}{1-t}\geq 0 \Rightarrow$

t		0		1	
$\frac{t}{1-t}$	$-$	0	$+$	ت ن	$-$

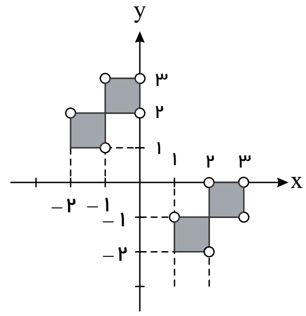
$\Rightarrow 0\leq t<1$

$$\Rightarrow 0\leq \frac{x^2}{x^2+1}<1 \Rightarrow g(x)=[\frac{x^2}{x^2+1}]=0 \Rightarrow f(x)=g(x)=0$$

پس دو تابع f و g برابرند.

۴ می‌دانیم حاصل جزء صحیح عددی صحیح است و از طرفی ضرب دو عدد صحیح زمانی برابر -2 است که داشته باشیم:

$[x][y] = -۲$



$\begin{cases} [x] = ۱ \Rightarrow ۱ \le x < ۲ \\ [y] = -۲ \Rightarrow -۲ \le y < -۱ \end{cases}$

$\begin{cases} [x] = -۱ \Rightarrow -۱ \le x < ۰ \\ [y] = ۲ \Rightarrow ۲ \le y < ۳ \end{cases}$

$\begin{cases} [x] = ۲ \Rightarrow ۲ \le x < ۳ \\ [y] = -۱ \Rightarrow -۱ \le y < ۰ \end{cases}$

$\begin{cases} [x] = -۲ \Rightarrow -۲ \le x < -۱ \\ [y] = ۱ \Rightarrow ۱ \le y < ۲ \end{cases}$

۵

الف

$۳[x^۲] + ۲[x] - ۲ = x \to x \in \mathbb{Z}$

حاصل براکت عددی صحیح است پس، از صورت سؤال می‌توان نتیجه گرفت که چون x برابر جمع و تفریق چند عدد صحیح است، باید عددی صحیح باشد یعنی باید $x \in \mathbb{Z}$ بنابراین $x^۲$ هم عددی صحیح است و داریم:

$x \in \mathbb{Z} \to x^۲ \in \mathbb{Z} \to ۳x^۲ + ۲x - ۲ = x \to ۳x^۲ + x - ۲ = ۰$

$\Delta = ۱ - ۴ \times ۳ \times (-۲) = ۲۵ \to x = \dfrac{-۱ \pm ۵}{۶} \to x = \dfrac{۲}{۳}$ غ ق ق , $x = -۱$ جواب

ب

$[x] + \left[x + \dfrac{۱}{۲}\right] - \left[x - \dfrac{۱}{۲}\right] = ۵ \to [x] + \left[x + \dfrac{۱}{۲}\right] - \left[x + ۱ - \dfrac{۱}{۲} - ۱\right] = ۵$

$\to [x] + \left[x + \dfrac{۱}{۲}\right] - \left[x + \dfrac{۱}{۲} - ۱\right] = ۵ \to [x] + \left[x + \dfrac{۱}{۲}\right] - \left[x + \dfrac{۱}{۲}\right] + ۱ = ۵$

$\to [x] = ۴ \to ۴ \le x < ۵$

۶

نکته : $x \notin \mathbb{Z} [x] + [-x] = -۱ \Rightarrow [-x] = -۱ - [x]$

$۳[x] - [۱ - x] = ۸ \Rightarrow ۳[x] - ۱ - [-x] = ۸ \Rightarrow ۳[x] - [-x] = ۹$

دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم.

حالت ۱) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow ۳x - (-x) = ۹ \Rightarrow ۴x = ۹ \Rightarrow x = \dfrac{۹}{۴} \notin \mathbb{Z}$ غیرقابل قبول

حالت ۲) $x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow ۳[x] - (-۱ - [x]) = ۹ \Rightarrow ۳[x] + ۱ + [x] = ۹$

$\Rightarrow ۴[x] = ۸ \Rightarrow [x] = ۲ \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} ۲ < x < ۳$

۷

$f(x) = \dfrac{۷}{x} + ۳ = y \to \dfrac{۷}{x} = y - ۳ \to x = \dfrac{۷}{y - ۳} \to f^{-۱}(x) = \dfrac{۷}{x - ۳} = g(x)$

$g(x) = \dfrac{۷}{x - ۳} = y \to x - ۳ = \dfrac{۷}{y} \to x = \dfrac{۷}{y} + ۳ \to g^{-۱}(x) = \dfrac{۷}{x} + ۳ = f(x)$

بله توابع g و f وارون یکدیگر هستند.

۸

$f(x) = \dfrac{x^۲ - ۱}{۲x^۲ + ۳}, \; x < ۰ \Rightarrow \dfrac{x^۲ - ۱}{۲x^۲ + ۳} = y \Rightarrow x^۲ - ۱ = ۲x^۲y + ۳y$

$\Rightarrow x^۲(۱ - ۲y) = ۱ + ۳y \Rightarrow x^۲ = \dfrac{۱ + ۳y}{۱ - ۲y}$

$$x^2>0 \Rightarrow \frac{1+3y}{1-2y}>0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} y & -\infty & & -\frac{1}{3} & & \frac{1}{2} & & +\infty \\ \hline \frac{1+3y}{1-2y} & & - & 0 & + & \text{ت ن} & - & \end{array} \Rightarrow -\frac{1}{3}<y<\frac{1}{2}$$

$$(1) \Rightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{\frac{1+3y}{1-2y}} \Rightarrow |x|=\sqrt{\frac{1+3y}{1-2y}} \xrightarrow{x<0} -x=\sqrt{\frac{1+3y}{1-2y}}$$

$$\Rightarrow x=-\sqrt{\frac{1+3y}{1-2y}} \Rightarrow y=f^{-1}(x)=-\sqrt{\frac{1+3x}{1-2x}}\ ,\ D_{f^{-1}}=R_f=(\frac{-1}{3},\frac{1}{2})$$

۹

$$f(x)=4-\sqrt{x-1}\ ,\ x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \Rightarrow D_f=[1,+\infty)$$

$$\sqrt{x-1}\geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x-1}\leq 0 \Rightarrow 4-\sqrt{x-1}\leq 4 \Rightarrow f(x)\leq 4 \Rightarrow R_f=(-\infty,4]$$

$$(f^{-1}of)(x)=x\ ,\ x\in D_f$$

$$(fof^{-1})(x)=x\ ,\ x\in R_f$$

با توجه به روابط بالا، تساوی $(fof^{-1})(x)=(f^{-1}of)(x)$ زمانی برقرار است که $x\in D_f\cap R_f$ باشد، پس داریم:

$$D_f\cap R_f=[1,+\infty)\cap(-\infty,4]=[1,4] \Rightarrow \text{جواب}=[1,4]$$

۱۰ **تابعی معکوس پذیر است که یک به یک باشد.**

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \sqrt{1-\sqrt{x_1^3-1}}=\sqrt{1-\sqrt{x_2^3-1}}$$

$$\Rightarrow 1-\sqrt{x_1^3-1}=1-\sqrt{x_2^3-1} \to x_1^3-1=x_2^3-1 \to x_1=x_2$$

تابع یک به یک است پس وارون پذیر است.

$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x^3-1}}=y \Rightarrow 1-\sqrt{x^3-1}=y^2$$

$$\Rightarrow 1-y^2=\sqrt{x^3-1} \Rightarrow x^3-1=(1-y^2)^2 \Rightarrow x=\sqrt[3]{(1-y^2)^2+1} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{(1-x^2)^2+1}$$

۱۱ **محدوده‌های دو تابع f و g را به صوت زیر یکسان می‌کنیم.**

$$f(x)=\begin{cases} 2x & x\geq 3 \\ 2x & 1<x<3 \\ x^2-1 & x\leq 1 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x-3 & x\geq 3 \\ 1+x & 1<x<3 \\ 1+x & x\leq 1 \end{cases}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases} 2x-(x-3) & x\geq 3 \\ 2x-(1+x) & 1<x<3 \\ x^2-1-(1+x) & x\leq 1 \end{cases}$$

$$(f-g)(x)=\begin{cases} x+3 & ,\ x\geq 3 \\ x-1 & ,\ 1<x<3 \\ x^2-x-2 & ,\ x\leq 1 \end{cases}$$

۱۲

$$D_f: x\geq 2 \quad ,\quad D_g=\{0,3,5\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{x=0,3,5\mid g(x)\geq 2\}=\{0,3\}$$

$$fog(0)=f(g(0))=f(4)=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}\ ,\ fog(3)=f(g(3))=f(2)=0$$

$$fog=\left\{(0,\sqrt{2}),(3,0)\right\}$$

$D_{gof}=\{x\in D_f | f(x)\in D_g\}=\{x\geq ۳ | f(x)=۰,۳,۵\}$

$f(x)=۰\to\sqrt{x-۲}=۰\to x=۲\to f(x)=۳\to\sqrt{x-۲}=۳\to x=۱۱$

$f(x)=۵\to\sqrt{x-۲}=۵\to x=۲۷\to D_{gof}=\{۲,۱۱,۲۷\}$

$gof(۲)=g(f(۲))=g(۰)=۴\,,\ gof(۱۱)=g(f(۱۱))=g(۳)=۲$

$gof(۲۷)=g(f(۲۷))=g(۵)=-۹\to gof=\{(۲,۴),(۱۱,۲),(۲۷,-۹)\}$

۱۳

$f(g(x))=g^۲(x)+۲g(x)=x^۴-۲x^۲+۲$

$g^۲(x)+۲g(x)+۱-۱=x^۴-۲x^۲+۲\quad\Rightarrow\quad(g(x)+۱)^۲=x^۴-۲x^۲+۳$

$\Rightarrow\quad(g(x)+۱)^۲=(x^۲-۱)^۲+۲\quad\Rightarrow\quad|g(x)+۱|=\sqrt{(x^۲-۱)^۲+۲}$

دو جواب برای $g(x)$ بدست می آید:

$g(x)=\pm\sqrt{(x^۲-۱)^۲+۲}-۱$

۱۴ با توجه به نمودار سؤال داریم:

$f(-۶)=-۵\Rightarrow f^{-۱}(-۵)=-۶\ \ ,\ \ f(۳)=۳\Rightarrow f^{-۱}(۳)=۳$

$$\frac{(gof)(-۲)+(gog)(۴)}{(f^{-۱}og)(۳)-f^{-۱}(-۵)}=\frac{g(f(-۲))+g(g(۴))}{f^{-۱}(g(۳))-(-۶)}=\frac{g(۰)+g(۰)}{f^{-۱}(۳)+۶}=\frac{۴+۴}{۳+۶}=\frac{۸}{۹}$$

۱۵

$f(x)=\dfrac{x-۱}{\sqrt[۳]{x-\sqrt{۲}}}\ \ ,\ \ x-\sqrt{۲}\neq ۰\Rightarrow x\neq\sqrt{۲}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\sqrt{۲}\}$

$g(x)=\sqrt{\dfrac{|x|+۳}{|x|-۱}}\ \ ,\ \ \dfrac{\overbrace{|x|+۳}^{\text{همواره مثبت}}}{|x|-۱}\geq ۰\Rightarrow|x|-۱>۰\Rightarrow|x|>۱$

$\Rightarrow x<-۱$ یا $x>۱\Rightarrow D_g=(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$

$D_{fog}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}=\{x\in(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)\,|\,g(x)\in\mathbb{R}-\{\sqrt{۲}\}\}$

$\Rightarrow D_{fog}=\{x<-۱$ یا $x>۱\,|\,g(x)\neq\sqrt{۲}\}\Rightarrow\sqrt{\dfrac{|x|+۳}{|x|-۱}}\neq\sqrt{۲}\Rightarrow\dfrac{|x|+۳}{|x|-۱}\neq ۲$

$\Rightarrow ۲|x|-۲\neq|x|+۳\Rightarrow|x|\neq ۵\Rightarrow x\neq\pm ۵$

در نتیجه:

$D_{fog}=\{x<-۱$ یا $x>۱\,|\,x\neq\pm ۵\}=(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)-\{۵,-۵\}$