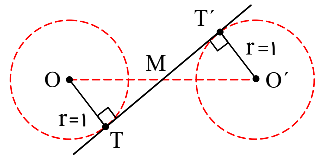
پاسخنامه تشریحی

۱ گزینه ۳ انتقال طولپاست پس شعاع‌های دو دایره برابرند:

$$۳ - a = a - ۱ \Rightarrow ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow \text{شعاع دو دایره } r = ۳ - ۲ = ۱$$



$$TT' = ۳ \Rightarrow MT = MT' = \frac{۳}{۲}$$

$$M\overset{\triangle}{T}O : OT = r = ۱ \quad , \quad MT = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow OM^{۲} = ۱^{۲} + (\frac{۳}{۲})^{۲} = \frac{۱۳}{۴} \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$$

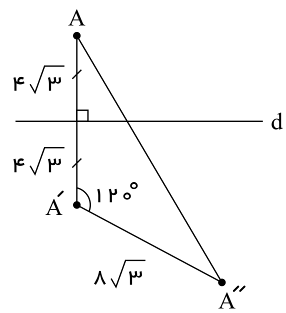
$$\Rightarrow OO' = ۲ \times \frac{\sqrt{۱۳}}{۲} = \sqrt{۱۳}$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{OO'^{۲} - (r - r)^{۲}} = OO' = \sqrt{۱۳}$$

۲ گزینه ۳ روش اول: مطابق شکل، نقطهٔ A' بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d بوده و نقطهٔ A'' دوران‌یافتهٔ نقطهٔ A نسبت به مرکز دوران A' و به اندازهٔ ۱۲۰° در جهت ساعتگرد است. کافی است رابطهٔ کسینوس‌ها را در مثلث $AA'A''$ بنویسیم:

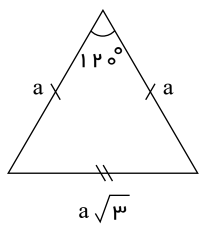
$$AA''^{۲} = AA'^{۲} + A'A''^{۲} - ۲AA' \cdot A'A'' \cdot \cos ۱۲۰^{\circ} \Rightarrow AA''^{۲} = (۸\sqrt{۳})^{۲} + (۸\sqrt{۳})^{۲} - ۲ \times ۸\sqrt{۳} \times ۸\sqrt{۳} \times (-\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow AA''^{۲} = ۱۹۲ + ۱۹۲ + ۱۹۲ = ۵۷۶ \Rightarrow AA'' = ۲۴$$

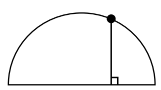


روش دوم: مطابق شکل مقابل، در مثلث متساوی‌الساقین به ساق a و زاویهٔ رأس ۱۲۰°، قاعده برابر است با $a\sqrt{۳}$.

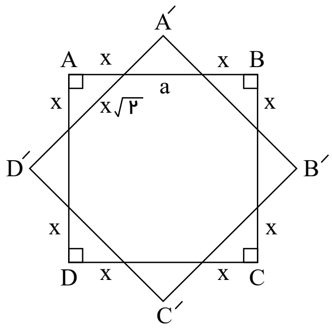
در اینجا $a = ۸\sqrt{۳}$؛ پس جواب برابر است با: $a\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳} \times \sqrt{۳} = ۲۴$



۳ گزینه ۳ می‌دانیم تبدیل تابع (نگاشتی) یک‌به‌یک از صفحه بر روی خودش است. بنابراین، تنها گزینهٔ (۳) شرط یک‌به‌یک بودن را داراست و در سایر گزینه‌ها چند نقطه می‌توانند به یک نقطه تصویر شوند، یعنی یک‌به‌یک نیستند.



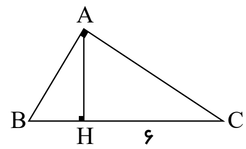
۴ گزینه ۲ اگر مطابق شکل مربع $ABCD$ را حول مرکز تقارن آن به اندازهٔ ۴۵° دوران دهیم، مربع $A'B'C'D'$ تشکیل می‌شود و سطح محصور بین این دو مربع، یک هشت ضلعی منتظم است. فرض می‌کنیم ضلع هشت ضلعی منتظم a باشد، بنابراین داریم:



$$\begin{cases}\text{طول ضلع مربع} = ۲x + a \\ a = x\sqrt{۲}\end{cases} \Rightarrow \text{طول ضلع مربع} = ۲x + x\sqrt{۲} = ۴ + ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow S_{\text{۸ ضلعی}} = S_{ABCD} - ۴ S_{\triangle \text{قائم‌الزاویه}} \Rightarrow S_{\text{۸ ضلعی}} = (۴ + ۲\sqrt{۲})^۲ - ۴ \times \frac{۱}{۲}x^۲$$

$$\xrightarrow{x=۲} S_{\text{۸ ضلعی}} = ۱۶ + ۱۶\sqrt{۲}$$

۵ گزینه ۱



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \to ۹۰^\circ + ۵\hat{C} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$

$$\to \hat{C} = ۱۵^\circ \,,\, \hat{B} = ۵\hat{C} = ۵ \times ۱۵^\circ = ۷۵^\circ$$

می‌دانیم اگر در مثلث قائم‌الزاویه یکی از زوایا ۱۵ درجه باشد، آنگاه طول ارتفاع وارد بر وتر، یک چهارم طول وتر است.

$$\text{ارتفاع روبه‌رو به } ۱۵^\circ \; AH = \frac{BC}{۴} = \frac{۱}{۴} \times ۶ = \frac{۳}{۲}$$

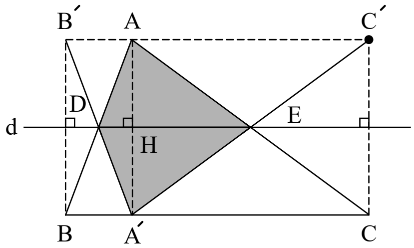
$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۲} \times ۶ = \frac{۹}{۲}$$

چون تبدیل طولپا است بنابراین مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC هم‌نهشت است.

$$S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۹}{۲}$$

۶ گزینه ۴

چون D و E وسط اضلاع هستند، بنابراین با توجه به شکل داریم:



$$DE \parallel BC \quad , \quad DE = \frac{BC}{۲} \Rightarrow AH = HA'$$

در بازتاب B و C نسبت به d نقاط B' و C' به‌دست می‌آید و بازتاب A (نقطهٔ A') روی ضلع BC قرار می‌گیرد.

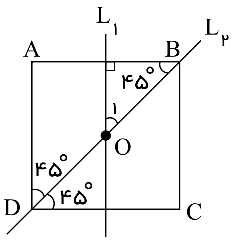
پس:

$$S_{ADA'E} = ۶ \quad , \quad \overset{\triangle}{ADE} \cong \overset{\triangle}{A'DE} \to S_{\overset{\triangle}{ADE}} = ۳$$

$$\overset{\triangle}{ADE} \sim \overset{\triangle}{ABC} \to \frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^۲ = \frac{۱}{۴} \to S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۴S_{ADE} = ۴(۳) = ۱۲$$

۷ گزینه ۳ از آنجا که قطرهای مربع، نیمسازند، داریم: $\hat{O}_۱ = ۴۵^\circ$

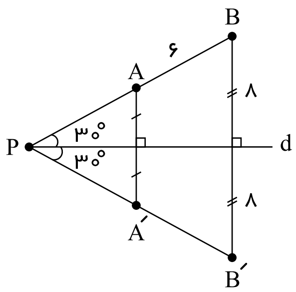
مطابق شکل، دو خط $L_۱$ و $L_۲$ به‌ترتیب عمودمنصف AB و امتداد قطر BD هستند و ترکیب دو بازتاب محوری $L_۱$ و $L_۲$ که باهم زاویهٔ α می‌سازند، یک دوران به اندازهٔ ۲α است که محل تلاقی دو خط $L_۱$ و $L_۲$ مرکز دوران است. درنتیجه، تبدیل مورد نظر دورانی با زاویهٔ ۹۰° است.



۸ گزینه ۳ چون بازتاب طولپاست، بنابراین:

$$PB = PB' \xrightarrow{\hat{P} = ۶۰^\circ} PB = PB' = BB' = ۱۶$$

(مثلث PBB' متساوی‌الاضلاع است)



$$\rightarrow PA = PB - AB = ۱۰ \rightarrow \frac{PA}{PB'} = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸}$$

۹ گزینه ۱ راه اول: دو نقطهٔ $A(۶,۰)$ و $B(۰,۳)$ را روی خط Δ درنظر می‌گیریم. بازتاب A و B نسبت به خط $y=-x$ نقاط $A'(۰,-۶)$ و $B'(-۳,۰)$ می‌شوند.

معادله خط گذرنده از دو نقطهٔ A' و B' به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y - ۰ = \frac{-۶ - ۰}{۰ + ۳}(x+۳) \Rightarrow y = -۲x - ۶ \Rightarrow y + ۲x = -۶ \quad (\Delta' \text{ معادله})$$

راه دوم: ضابطهٔ بازتاب نسبت به $y=-x$ به‌صورت $T(x,y) = (-y,-x)$ است. داریم:

$$T(x,y) = (-y,-x) = (x',y') \Rightarrow x' = -y \quad , \quad y' = -x$$

در خط Δ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۲y + x = ۶ \Rightarrow -۲x' - y' = ۶ \Rightarrow ۲x' + y' = -۶$$

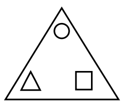
۱۰ گزینه ۴ تبدیل همانی تبدیلی است که هر نقطه از صفحه را بر خود آن نظیر نماید. به این ترتیب طول پاره‌خط‌ها تغییر نمی‌کند زیرا هر پاره‌خط بر خودش منطبق است. همچنین همهٔ نقاط صفحه نقاط ثابت تبدیل هستند زیرا جابه‌جا نمی‌شوند.

از مهم‌ترین تبدیل‌های همانی می‌توان انتقال با بردار صفر و دوران با زاویهٔ صفر و تجانس با نسبت $K=۱$ را معرفی نمود.

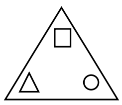
بازتاب نمی‌تواند از تبدیل همانی باشد به‌جز نقاط روی محور بازتاب که برخودشان تصویر می‌شوند.

۱۱ گزینه ۴

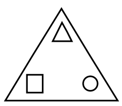
در قرینهٔ شکل نسبت به خط $L_۱$، جای مثلث و مربع تعویض می‌شود.



در قرینهٔ این شکل نسبت به خط $L_۲$، جای مربع و دایره عوض می‌شود.



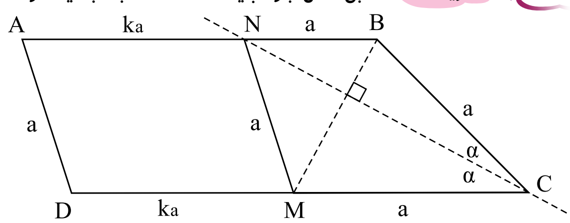
در قرینهٔ شکل نسبت به خط $L_۳$، جای مثلث و مربع تعویض می‌شود.



۱۲ گزینه ۴ در هر تبدیل طولپا، تبدیل یافته هر زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازه با آن است.

۱۳ گزینه ۳ مطابق شکل، بازتاب‌یافتهٔ نقطهٔ B نسبت به نیمساز CN نقطهٔ M است که روی ضلع CD قرار دارد. می‌دانیم $BCMN$ یک لوزی است. فرض کنیم:

$BC = BN = CM = MN = a$ و $AN = DM = ka$



طبق فرض داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{محیط } ABCD = ۲a + (۲k+۲)a = (۲k+۴)a \\ \text{محیط } BCMN = ۴a \end{array}\right\} \rightarrow (۲k+۴)a = ۲(۴a) \Rightarrow k = ۲$$

بنابراین $AN = ۲a$ و $AB = ۳a$ پس:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{BCMN}} = \frac{AB}{MC} = \frac{۳a}{a} = ۳$$

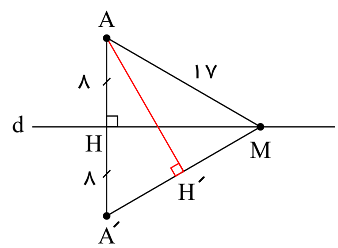
۱۴ گزینه ۳ طبق فرض $AH = ۸$ و $AM = ۱۷$، پس در مثلث قائم‌الزاویه AHM با نوشتن رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$MH = \sqrt{۲۸۹ - ۶۴} = ۱۵$$

از آنجا که تبدیل بازتاب، ایزومتری است، پس $A'M = AM = ۱۷$. درنتیجه، خواهیم داشت:

$$\underset{AMA'}{S} = \cancel{\frac{۱}{۲}} AA' \cdot MH = \cancel{\frac{۱}{۲}} A'M \cdot AH'$$

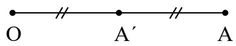
$$\Rightarrow ۱۶ \times ۱۵ = ۱۷ \times AH' \Rightarrow AH' = \frac{۲۴۰}{۱۷} \simeq ۱۴/۱$$



که این عدد به ۱۴ نزدیک‌تر است.

۱۵ گزینه ۲ از آنجا که داریم:

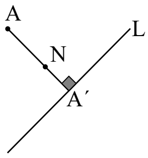
$OA = ۲OA'$



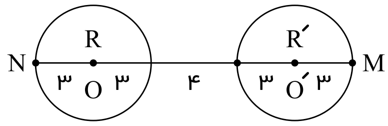
پس تبدیل T طولپا نیست. در حقیقت این تبدیل یک تجانس به مرکز O و ضریب $k = \frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

۱۶ گزینه ۴

مطابق شکل، تابع M، از دو نقطه A و N، تنها یک تصویر A' می‌سازد. در تبدیل هر نقطه از صفحه تنها می‌تواند تصویر یک نقطه از همان صفحه باشد(همانند مفهوم تابع یک به یک) پس این تابع (M) تبدیل نیست.



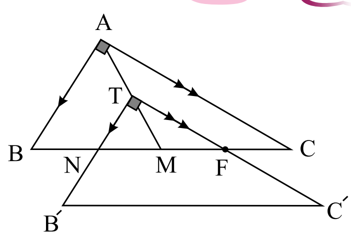
۱۷ گزینه ۲



$\text{انتقال طولپاست} \rightarrow R' = R = ۳$

$MN = ۱۰ + ۶ = ۱۶$

۱۸ گزینه ۱



$$\overset{\triangle}{NTF} \sim \overset{\triangle}{ABC} \rightarrow \text{نسبت مساحت} = (\text{نسبت تشابه})^۲ = (\text{نسبت میانه‌های نظیر})^۲$$

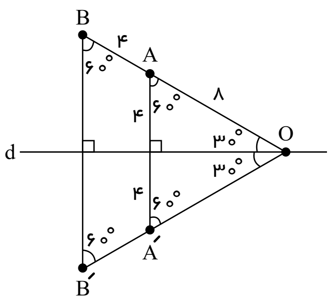
$$\rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{NFT}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = (\frac{TM}{AM})^۲ = \frac{۱}{۱۶} \rightarrow \frac{TM}{AM} = \frac{۱}{۴}$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه، طول میانهٔ وارد بر وتر، نصف طول وتر است. بنابراین:

$$\frac{TM}{\frac{BC}{۲}} = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{BC=۸} \frac{TM}{۴} = \frac{۱}{۴} \rightarrow TM = ۱ \rightarrow AT = AM - TM = ۴ - ۱ = ۳$$

۱۹ گزینه ۲

می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$

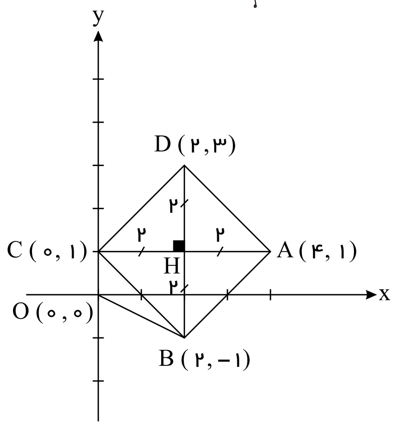


$$S_{ABB'A'} = S_{\overset{\triangle}{OBB'}} - S_{\overset{\triangle}{OAA'}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}OB^۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۴}OA^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(OB^۲ - OA^۲) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۱۲^۲ - ۸^۲) = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۸۰ = ۲۰\sqrt{۳}$$

۲۰ گزینه ۱ بازتاب نقطهٔ C نسبت به محور yها بر خودش منطبق است. بنابراین C روی محور yها قرار دارد و مختصات آن $(۰, ۱)$ می‌باشد.

چهارضلعی $ABCD$ مربع است. بنابراین اندازهٔ قطرهای آن برابرند و عمودمنصف یکدیگر می‌باشند و داریم:

بازتاب نقطهٔ D نسبت به قطر AC نقطهٔ B می‌باشد که فاصله‌اش از مبدأ مختصات برابر است با:



$$CH = AH = \frac{BD}{۲} = \frac{AC}{۲} = \frac{x_A - x_C}{۲} = \frac{۴ - ۰}{۲} = ۲$$

$$OB = \sqrt{(۲ - ۰)^{۲} + (-۱ - ۰)^{۲}} = \sqrt{۴ + ۱} = \sqrt{۵}$$