پاسخنامه تشریحی

۱ گزینه ۲ تابع خطی به‌صورت $f(x) = ax + b$ نشان داده می‌شود.

$$f(3x-1) + 3f(1-x) = 4 \to a(3x-1) + b + 3(a(1-x)+b) = 4$$
$$\to 3ax - a + b + 3a - 3ax + 3b = 4 \to 2a + 4b = 4 \to a + 2b = 2$$
$$f(5) = 2 \to 5a + b = 2 \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 2 \\ 5a + b = 2 \end{cases} \to a = \frac{2}{9}, b = \frac{8}{9} \to f(x) = \frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$$
$$\to f(14) = \frac{28}{9} + \frac{8}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

۲ گزینه ۴ تابع خطی به‌صورت $f(x) = ax + b$ نشان داده می‌شود.

$$f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{x^2 - 12x + 1}{2x} \to ax + b + \frac{a}{x} + b = \frac{ax^2 + bx + a + bx}{x}$$
$$= \frac{ax^2 + 2bx + a}{x} = \frac{2ax^2 + 4bx + 2a}{2x} = \frac{x^2 - 12x + 1}{2x} \xrightarrow{\text{مقایسه}} a = \frac{1}{2},\ 4b = -12\ ,\ b = -3$$
بنابراین $f(x) = \frac{1}{2}x - 3 \to f(-4) = -2 - 3 = -5$

۳ گزینه ۳ می دانیم: $\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)}$

$$f(x + \frac{1}{x}) = x^3 + \frac{1}{x^3} \to f(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})^3 - 3x(\frac{1}{x})(x + \frac{1}{x})$$
$$\to f(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x})$$
$$\xrightarrow{x+\frac{1}{x}=t} f(t) = t^3 - 3t \to f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^3 - 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

۴ گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})}$

$$-1 \le \sin(x + \frac{\pi}{4}) \le 1 \Rightarrow -\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \le \sqrt{2} \to$$ پس باید در ضابطه‌ی دوم قرار داد

$$f(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2\underbrace{\sin x \cos x}_{\frac{1}{2}\sin 2x} - 1 = \sin 2x$$

۵ گزینه ۳ برای تبدیل شده این تابع به یک تابع ثابت باید شرط زیر برقرار باشد

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \to \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$
$$f(x) = \frac{mx - 4}{x - m} \to \frac{m}{1} = \frac{-4}{-m} \to m^2 = 4 \to m = \pm 2$$

هر دو مقدار را جایگذاری می‌نمائیم

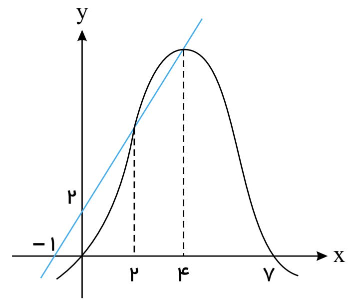
$$m = 2 \to f(x) = \frac{2x - 4}{x - 2} = \frac{2(x-2)}{x - 2} = 2\ \checkmark$$
$$m = -2 \to f(x) = \frac{-2x - 4}{x + 2} = \frac{-2(x+2)}{x + 2} = -2\ \checkmark$$

۶ گزینه ۳ هم $x^2 \ge 0$ است هم $(x^2 - 4)^2 \ge 0$ است یعنی زیر رادیکال به خاطر منفی هرگز نمی‌تواند مثبت باشد ولی می‌تواند صفر باشد.

$$-x^2(x^2 - 4)^2 = 0 \Rightarrow x = 0\ ,\ x = 2\ ,\ x = -2$$

پس دامنه‌ی تعریف این تابع ۳ عضو دارد.

۷ گزینه ۱ معادلهٔ خطی که از نقاط $(-1, 0)$ و $(0, 2)$ عبور می‌کند را پیدا می‌کنیم:



$$A=(-۱,۰)\,,\ B=(۰,۲)\ \Rightarrow m_{AB}=\frac{۲-۰}{۰+۱}=۲$$

$$y-۰=۲(x+۱)\ \Rightarrow y=۲x+۲$$

از طرفی باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد، پس داریم:

$$f(x)-۲x-۲\ge ۰\ \Rightarrow f(x)\ge ۲x+۲$$

طبق شکل، فقط در بازهٔ $[۲,۴]$ نمودار تابع $f(x)$ بالاتر از خط به معادلهٔ $y=۲x+۲$ قرار دارد. بنابراین دامنهٔ تابع داده شده، بازهٔ $[۲,۴]$ است.

۸ گزینه ۲

$$f(x)=\frac{b}{x+۳}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۳\}$$

چون دو تابع برابرند پس دامنهٔ تابع g هم باید به‌صورت $D_g=\mathbb{R}-\{-۳\}$ باشد، بنابراین مخرج تابع g باید ریشهٔ مضاعف $x=-۳$ داشته باشد، که داریم:

$$x^۲+cx+d=(x+۳)^۲\Rightarrow x^۲+cx+d=x^۲+۶x+۹\Rightarrow c=۶\,,\ d=۹$$

$$g(x)=\frac{x-a}{(x+۳)^۲}\Rightarrow f(x)=g(x)\Rightarrow \frac{b}{x+۳}=\frac{x-a}{(x+۳)^۲}\Rightarrow b=\frac{x-a}{x+۳}$$

$$\Rightarrow x-a=bx+۳b\Rightarrow \begin{cases} b=۱\\ -a=۳\Rightarrow a=-۳\end{cases}\Rightarrow \frac{abc}{d}=\frac{-۳\times ۱\times ۶}{۹}=-۲$$

۹ گزینه ۲ باتوجه به وجود $\frac{۱}{x}$ در ضابطهٔ تابع f، پس $x=۰$ در دامنهٔ تابع f قرار ندارد یعنی یکی از دو مقدار a و b برابر صفر است. (مثلاً $a=۰$). حال چون فقط یک عدد دیگر (b) در دامنهٔ f وجود ندارد، دو حالت به‌وجود می‌آید.

حالت ۱- مخرج ریشهٔ مضاعف دارد و آن ریشهٔ مضاعف هم همان b است.

$$x^۲+۶x+k=۰\Rightarrow \Delta=۰\Rightarrow ۳۶-۴k=۰\Rightarrow k=۹\Rightarrow x^۲+۶x+۹=۰\Rightarrow (x+۳)^۲=۰$$

$$\Rightarrow x+۳=۰\Rightarrow x=-۳\Rightarrow b=-۳\Rightarrow |k+a+b|=|۹+۰-۳|=۶$$

حالت ۲- مخرج دو ریشه دارد که یکی از آن‌ها $x=۰$ است.

$$x^۲+۶x+k=۰\xrightarrow{x=۰}k=۰\Rightarrow x^۲+۶x=۰\Rightarrow x(x+۶)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=۰\\ x=-۶\Rightarrow b=-۶\end{cases}$$

$$|k+a+b|=|۰+۰-۶|=۶$$

۱۰ گزینه ۱ دو تابع f و g را برابر می‌نامیم هرگاه:

الف) دامنهٔ f و دامنهٔ g باهم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنهٔ یکسان داشته باشیم: $f(x)=g(x)$

در گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ دامنهٔ دو تابع داده شده برابر نیستند زیرا:

گزینهٔ ۲) $D_f=\mathbb{R}\,,\ D_g:x\ge ۰\Rightarrow D_g=[۰,+\infty)\Rightarrow D_f\neq D_g$

گزینهٔ ۳) $D_f:x\,|x|\ge ۰\xrightarrow{|x|\ge ۰}x\ge ۰\Rightarrow D_f=[۰,+\infty)\,,\ D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\neq D_g$

گزینهٔ ۴) $D_f:x^۲\ge ۰\Rightarrow x\in\mathbb{R}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}\,,\ D_g:x\ge ۰\Rightarrow D_g=[۰,+\infty)\Rightarrow D_f\neq D_g$

جواب گزینهٔ ۱ می‌باشد زیرا:

$$f(x)=(\sqrt{x})^۲\Rightarrow x\ge ۰\Rightarrow D_f=[۰,+\infty)$$

$$g(x)=\sqrt{x\,|x|}\Rightarrow x\,|x|\ge ۰\xrightarrow{|x|\ge ۰}x\ge ۰\Rightarrow D_g=[۰,+\infty)\Rightarrow D_f=D_g=[۰,+\infty)$$

$$x\ge ۰\Rightarrow |x|=x\Rightarrow g(x)=\sqrt{x\,|x|}=\sqrt{x\cdot x}=\sqrt{x^۲}=(\sqrt{x})^۲=f(x)$$

g و f برابرند.

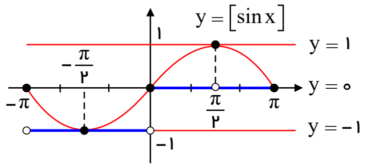
۱۱ گزینه ۳

زیر رادیکال با فرجه زوج باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد. $\Rightarrow ۱۶-x^۲\ge ۰\Rightarrow x^۲\le ۱۶\Rightarrow -۴\le x\leqslant ۴$

در ضمن مخرج نیز نباید صفر شود. $\Rightarrow [x]-۴=۰\Rightarrow [x]=۴\Rightarrow ۴\le x<۵$ باید از دامنه حذف شوند.

$D_f=-۴\le x<۴$ یا $x\in[-۴,۴)$

۱۲ گزینه ۴



واضح است که شکل از سه پاره‌خط و دو نقطه تشکیل شده است.

۱۳ گزینه ۱ به ازای هر عدد طبیعی n به راحتی می‌توان نشان داد که:

$$\underbrace{n^۲+۲n+۱}_{(n+۱)^۲} < n^۲+۴n+۱ < \underbrace{n^۲+۴n+۴}_{(n+۲)^۲} \Rightarrow n+۱ < \sqrt{n^۲+۴n+۱} < n+۲$$

$$\Rightarrow \ n\in N: [\sqrt{n^۲+۴n+۱}] = n+۱ \xrightarrow{\text{طبق فرض}} n+۱=۹ \ \Rightarrow \ n=۸$$

پس داریم: $[\sqrt{۲n^۲+n+۱}] = [\sqrt{۱۲۸+۸+۱}] = [\sqrt{۱۳۷}] = [۱۱/\cdots] = ۱۱$

۱۴ گزینه ۱

$$[\frac{۵x^۲+۱۰x+۳}{x^۲+۲x+۴}] = [\frac{۵x^۲+۱۰x+۲۰-۱۷}{x^۲+۲x+۴}] = [\frac{۵x^۲+۱۰x+۲۰}{x^۲+۲x+۴} - \frac{۱۷}{x^۲+۲x+۴}] = [۵-\frac{۱۷}{x^۲+۲x+۴}] = [۵-\frac{۱۷}{(۱۳۹۷)^۲+۲(۱۳۹۷)+۴}]$$
$$= [۵^-] = ۴$$

تذکر: در حل چنین سؤالاتی باید ابتدا با تفکیک مناسب کسر داده شده، ضابطهٔ تابع را به حالت ساده‌تری تبدیل کنیم. سپس مقدار عددی آن را به ازای مقدار تعیین شده برای متغیر x به‌دست آوریم.

۱۵ گزینه ۲

$$\left[x+\frac{۱}{۲}\right] = -۲ \Rightarrow -۲ \le x+\frac{۱}{۲} < -۱ \Rightarrow -۲-\frac{۱}{۲} \le x < -۱-\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow -\frac{۵}{۲} \le x < -\frac{۳}{۲} \Rightarrow -۵ \le ۲x < -۳ \Rightarrow [۲x] = -۵\ ,\ -۴$$

۱۶ گزینه ۳ قدم اول تعیین مقدار k می‌باشد. تابع را با خط $y=۲k+۵$ تقاطع می‌دهیم

$$f(x) = ۲k+۵ \to ۲x^۵+(k-۱)x^۴+۲k+۵ = ۲k+۵$$
$$\to x^۴(۲x+k-۱) = ۰ \to \begin{cases} x=۰ \\ x=\dfrac{۱-k}{۲} \end{cases}$$

حال باید برای حفظ وارون‌پذیری تابع هر دو ریشه با هم برابر باشند.

$$\frac{۱-k}{۲} = ۰ \to k=۱ \to f(x) = ۲x^۵+۷$$

اگر $A\left\lvert\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ روی تابع f باشد $A'\left\lvert\begin{matrix}b\\a\end{matrix}\right.$ روی تابع f^{-1} قرار دارد. یعنی: $f(a)=b \leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

$$\underset{f^{-1}}{\overset{A'}{\downarrow}}\left|\begin{matrix}۹\\?\end{matrix}\right. \to \underset{f}{\overset{A}{\downarrow}}\left|\begin{matrix}?\\۹\end{matrix}\right. \to f(x)=۹ \to ۲x^۵+۷=۹$$

$$\to ۲x^۵=۲ \to x^۵=۱ \to x=۱ \to f^{-1}(۹)=۱$$

$$f\left(-f^{-1}(۹)\right) = f(-۱) = ۲(-۱)^۵+۷ = ۵$$

۱۷ گزینه ۳ شرط معکوس‌پذیری، یک به یک بودن تابع f می‌باشد. پس معادله‌ی زیر قابل تشکیل است.

$$m^۲+۲m = ۴-m \to m^۲+۳m-۴ = ۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} m=۱ \\ m=\dfrac{c}{a}=-۴ \end{cases}$$

حال هر دو مقدر را در تابع جایگذاری می‌نمائیم تا مقادیر قابل قبول را مشخص نمائیم:

$m=۱ \to f=\{(۳,۲),(۴,۴),(۲,-۲)\}$ قابل قبول

$m=-۴ \to \{(۸,۲),(-۱,۴),(۲,-۲)\}$ قابل قبول

۱۸ گزینه ۲

اگر $A\left\lvert\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ روی تابع f باشد $A'\left\lvert\begin{matrix}b\\a\end{matrix}\right.$ روی تابع f^{-1} قرار دارد. یعنی: $f(a)=b \leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

هر نقطه روی محور yها دارای طول صفر است $\to f(x)=0$ $\quad \underset{f}{\underset{\downarrow}{A}}\left|\begin{matrix}?\\0\end{matrix}\right. \to \underset{f^{-1}}{\underset{\downarrow}{A'}}\left|\begin{matrix}0\\?\end{matrix}\right.$

$$\frac{x^3+3x^2+3x+4}{x^3+3x^2+3x-1}=0 \to x^3+3x^2+3x+1+3=0$$

$$\to (x+1)^3=-3 \to (x+1)=\sqrt[3]{-3} \to x=-1-\sqrt[3]{3} \to A\left|\begin{matrix}-1-\sqrt[3]{3}\\0\end{matrix}\right.$$

$$\to A'\left|\begin{matrix}0\\-1-\sqrt[3]{3}\end{matrix}\right. \to f^{-1}(0)=-1-\sqrt[3]{3}$$

۱۹ **گزینه ۳** می‌دانیم دامنهٔ $\frac{f}{g}$ اشتراک دامنه‌های f و g است به‌جز xهایی که به‌ازای آن‌ها $g(x)=0$ است.

اول: دامنهٔ f

$$6-x-x^2 \geq 0 \Rightarrow -(x+3)(x-2) \geq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 2$$

دوم: دامنهٔ g: از نمودار $\mathbb{R}$ است. پس اشتراک دامنهٔ f و g همان $[-3,2]$ است. ضمناً تابع g در $x=-2$، $x=-1$ و $x=1$ صفر می‌شوند که اگر این سه عدد را از مجموعهٔ $[-3,2]$ حذف کنیم، دامنهٔ $\frac{f}{g}$ به شکل زیر در می‌آید.

$$[-3,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]$$

که شامل اعداد صحیح -3 و 0 و 2 است.

۲۰ **گزینه ۱**

$$y=-\cos(\frac{3\pi}{2}+x)+2=-\sin x+2$$

حال به کمک انتقال نمودار $y=\sin x$، نمودار تابع $y=2-\sin x$ را در فاصلهٔ $[0,\pi]$ رسم می‌کنیم.