

الله الرحمن الرحيم

کتاب کار، تمرین و آزمون

هندسه (۲)

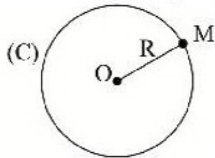


گروه علمی هندسه دبیرستان ماندگار البرز

فصل اول: دایره

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

تعریف دایره: فرض کنید O نقطه‌ای ثابت و R عددی حقیقی و مثبت باشد. دایره‌ای به مرکز O و شعاع R مجموعه‌ی تمام نقطه‌هایی از صفحه است که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی O برابر R باشد.

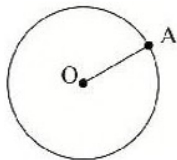


M روی دایره است. $\Leftrightarrow OM = R$

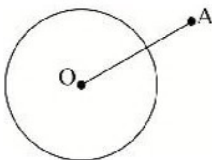
قرار داده: دایره‌ی C به مرکز O و به شعاع R : $C(O, R)$

وضع نقطه و دایره:

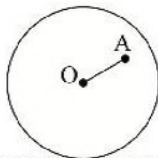
نقطه‌ی A و دایره‌ی $C(O, R)$ را در نظر بگیرید. وضعیت این نقطه نسبت به دایره یکی از سه حالت زیر است:



۱- نقطه‌ی A روی دایره است. ($OA = R \Leftrightarrow$ روی دایره است)



۲- نقطه‌ی A بیرون دایره است. ($OA > R \Leftrightarrow$ بیرون دایره است)



۳- نقطه‌ی A درون دایره است. ($OA < R \Leftrightarrow$ درون دایره است)

(۱) از یک نقطه در صفحه، نامتناهی دایره می‌گذرد که مرکز این دایره‌ها،



هر نقطه‌ی دلخواه از صفحه، به غیر از نقطه‌ی موردنظر است.

(۲) از دو نقطه متمایز A و B در صفحه نامتناهی دایره می‌گذرد که مرکز این دایره‌ها روی

عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

توجه! کوچک‌ترین دایره‌ی گذرنده از دو نقطه‌ی A و B، دایره‌ای به قطر AB است.

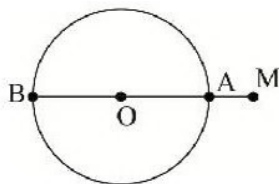


۳) سه نقطه‌ی A و B و C را در نظر می‌گیریم.

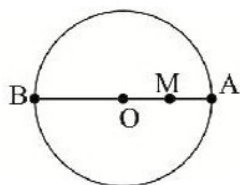
الف) اگر سه نقطه‌ی A و B و C روی یک خط راست قرار نداشته باشند، فقط یک دایره از آن‌ها می‌گذرد و مرکز این دایره محل برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث است.

ب) اگر سه نقطه‌ی A و B و C روی یک خط راست قرار داشته باشند، هیچ دایره‌ای وجود ندارد که از هر سه نقطه عبور کند. چون عمودمنصف‌های پاره‌خط‌هایی که این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کنند موازی‌اند و یکدیگر را قطع نمی‌کنند. (الف) و (ب) را امتحان کنید)

دورترین و نزدیک‌ترین نقطه‌ی دایره به یک نقطه، نقطه‌ی M و دایره‌ی $C(O, R)$ را در نظر بگیرید. با توجه به شکل، در هر دو حالت، در بین نقطه‌های روی دایره، A نزدیک‌ترین نقطه به M و نقطه‌ی B دورترین نقطه‌ی دایره به M هستند.



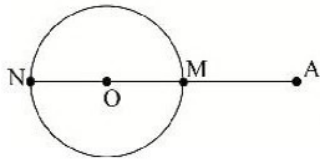
$$MA = |OM - R|$$



$$MB = OM + R$$

مثال

۱: کمترین و بیشترین فاصله‌ی نقطه‌ی A خارج دایره از این دایره به ترتیب ۸ و ۱۲ است.

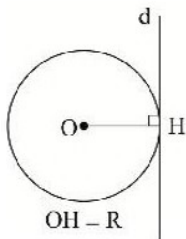


شعاع این دایره چقدر است؟

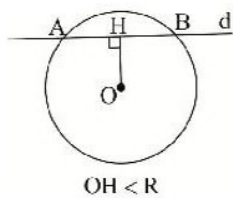
اوضاع نسبی خط و دایره:

خط d و دایره‌ی $C(O,R)$ را در نظر بگیرید. بر اساس تعداد نقطه‌های مشترک خط d و دایره‌ی $C(O,R)$ ، این خط با دایره یکی از سه حالت زیر را دارد:

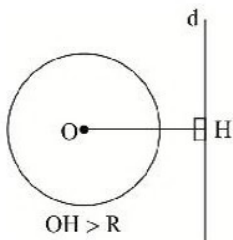
۱- خط d بر دایره‌ی $C(O,R)$ مماس است. (خط و دایره در یک نقطه مشترک‌اند) $OH = R$



۲- خط d و دایره‌ی $C(O,R)$ متقاطع‌اند. (خط و دایره در دو نقطه مشترک‌اند) $OH < R$



۳- خط d خارج دایره‌ی $C(O,R)$ است. (خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند) $OH > R$

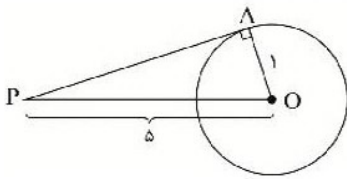




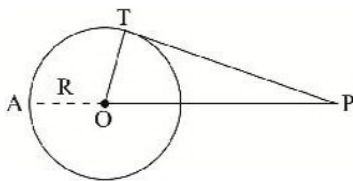
همیشه خط مماس بر دایره بر شعاع نقطه‌ی تماس عمود است.

مثال ۲: مرکز دایره‌ی $C(O, ۳)$ به فاصله‌ی $۱-۲x$ از خط d است. اگر این خط دایره را در دو نقطه قطع کند، حدود x را به دست آورید.

مثال ۳: در شکل مقابل طول $PO = ۵$ و $R = ۱$ است. طول PA را بیابید.

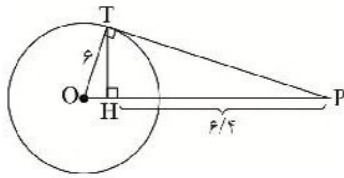


مثال ۴: فاصله‌ی دورترین نقطه‌ی دایره از نقطه‌ی P برابر ۹ و فاصله‌ی P تا مرکز دایره $\frac{۱۳}{۲}$ است. طول مماس رسم شده از نقطه‌ی P بر دایره را به دست آورید.



مثال

۵: اندازه‌ی تصویر مماس PT روی قطر گذرنده از نقطه‌ی P در دایره‌ای به شعاع ۶ برابر $۶/۴$ است. اندازه‌ی مماس PT را به دست آورید.



یادآوری برخی از مفاهیم اولیه دایره:

- ۱- شعاع دایره: پاره‌خطی را که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره است. شعاع دایره می‌گوییم. (شکل رسم کنید)
- ۲- وتر دایره: پاره‌خطی که دو سر آن روی محیط دایره قرار دارد وتر نامیده می‌شود. (شکل رسم کنید)

- ۳- قطر دایره: قطر وتری است که از مرکز دایره می‌گذرد. (شکل رسم کنید)

۴- زاویه‌ی مرکزی: زاویه‌ای را که رأس آن مرکز دایره است و دو ضلع آن محیط دایره را قطع می‌کند زاویه‌ی مرکزی می‌گوییم. (شکل رسم کنید)

۵- کمان: دو نقطه‌ی A و B روی محیط دایره را در نظر بگیرید. این دو نقطه محیط دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کنند که به آن‌ها، کمان یا قوس می‌گوییم. (شکل رسم کنید)

۶- اندازه‌ی کمان، همان اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به آن کمان است و واحد آن درجه یا رادیان می‌باشد. (مثال بزنید و شکل رسم کنید)

نکته نکته
نکته نکته



نباید اندازه‌ی یک کمان را با طول آن اشتباه گرفت.

(مثال بزنید و شکل رسم کنید)

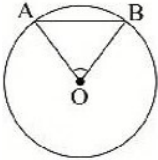
رابطه‌ی بین طول و اندازه‌ی کمان:

$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان } AB}{360^\circ}$$

مثال

۶: در شکل مقابل شعاع دایره برابر ۱۲ و طول کمان کوچک‌تر AB برابر 4π است. اندازه‌ی

وتر AB را بیابید.



مثال

۷: طول کمان دایره‌ای به مرکز O و با اندازه‌ی 30° با طول کمان دایره‌ای به مرکز O' و با

اندازه‌ی 45° برابر است. نسبت مساحت دایره‌ی به مرکز O به مساحت دایره‌ی به مرکز O' را به دست آورید.

نکته نکته نکاتی در مورد وتر و کمان نظیر آن



۱- در هر دایره، قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

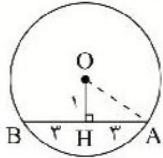
(شکل رسم کنید و نتایج را بنویسید)

۲- خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند. (شکل رسم کنید و نتایج را بنویسید)

نتیجه: وسط کمان‌های نظیر یک وتر، مرکز دایره و وسط وتر موردنظر روی یک خط راست قرار دارند.

مثال

۸: در شکل مقابل $AB = 6$ و $OH = 1$ و $\widehat{OHA} = 90^\circ$ ، طول شعاع دایره چقدر است؟



نکاتی در مورد دو وتر از یک دایره



۱- کمان‌های نظیر دو وتر مساوی باهم برابرند و برعکس. (شکل رسم کنید و با نماد ریاضی بنویسید)

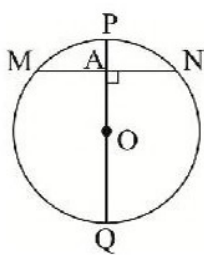
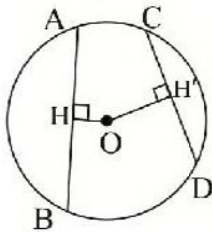
۲- در هر دایره، وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس. (شکل رسم کنید و به صورت ریاضی بنویسید.)

۳- در یک دایره، اگر دو وتر نامساوی باشند، آنگاه وتری که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس. (شکل رسم کنید و به صورت ریاضی بنویسید.) (توجه، برای ۱ و ۲ و ۳ جا منظور شود.)

قطر دایره بزرگ‌ترین وتر دایره است زیرا از مرکز دایره کمترین فاصله را دارد.

مثال ۹: در دایره‌ی شکل مقابل اگر $AB > CD$ و $OH = 4x + 2$ و $OH' = x + 8$ باشد،

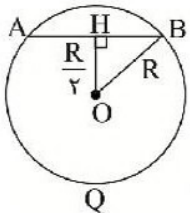
حدود x را به دست آورید.



وتر مینیمم: نقطه‌ی A که مرکز دایره نیست، درون دایره قرار دارد. از این نقطه نامتناهی وتر می‌گذرد که بزرگ‌ترین آن‌ها قطر دایره است و کوچک‌ترین آن‌ها وتری است که بر قطر گذرنده از A عمود است. در شکل مقابل، PQ بزرگ‌ترین وتر گذرنده از A و MN کوچک‌ترین وتر گذرنده از A است که به آن وتر مینیمم گذرنده از A می‌گوییم.

مثال ۱۰: از نقطه‌ی H به فاصله‌ی $\frac{R}{4}$ از مرکز دایره‌ی $C(O, R)$ وتری مینیمم در دایره رسم

کرده‌ایم. طول این وتر مینیمم را به دست آورید.



زاویه‌ی مماسی: زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره است و ضلع‌های آن محیط را قطع

می‌کند. (دو وتر دایره‌اند)



اندازه‌ی هر زاویه‌ی مماسی برابر نصف اندازه‌ی کمان رو به روی آن

است. (شکل رسم کنید و به صورت ریاضی بنویسید).

نتایج مهم

۱- در هر دایره اندازه‌ی زاویه‌های مماسی (روبه‌رو به یک کمان باهم برابرند. (شکل رسم کنید و به صورت ریاضی بنویسید)

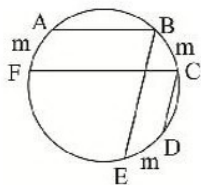
۲- اندازه‌ی زاویه‌ی مماسی (روبه‌رو به قطر دایره برابر 90° است. (شکل رسم کنید و به صورت ریاضی بنویسید)

۳- کمان‌های ممصور بین دو وتر موازی برابرند. (شکل رسم کنید و به صورت ریاضی بنویسید)

مثال

۱۱: در شکل روبه‌رو، اگر $AB \parallel FC$ ، $CD \parallel BE$ و $\widehat{AB} = 60^\circ$ ، $\widehat{CD} = 40^\circ$ و $\widehat{EF} = 110^\circ$

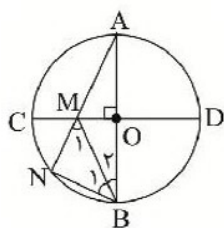
اندازه‌ی زاویه‌ی FCD را به دست آورید.

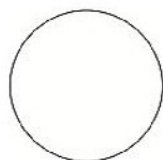


مثال

۱۲: در شکل مقابل، دو قطر AB و CD بر هم عمودند. اگر $MN = NB$ اندازه‌ی زاویه‌ی

A را به دست آورید.





زاویه ظلّی: زاویه‌ای را که رأس آن روی محیط دایره است، یک ضلع آن وتر دایره و

ضلع دیگر آن مماس بر دایره است، زاویه‌ی ظلّی می‌نامند. (شکل رسم کنید و به ریاضی

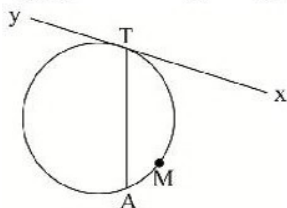
نشان دهید)

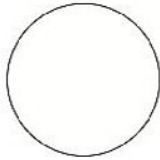
قضیه: اندازه‌ی هر زاویه‌ی ظلّی برابر با نصف کمان رو به روی آن است. (روی شکل بالا نشان دهید)

مثال

۱۳: در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی ATx برابر $11^\circ + \alpha$ و اندازه‌ی کمان AMT برابر

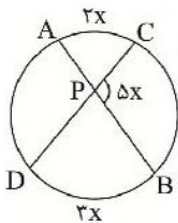
$40^\circ - 3\alpha$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی ATy را بیابید.



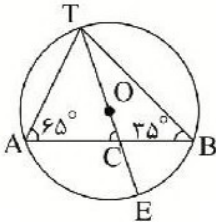


زاویه‌ی بین دو وتر: اندازه‌ی زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود، برابر نصف مجموع اندازه‌ی دو کمانی از دایره است که به ضلع‌ها و امتداد ضلع‌های آن زاویه محدود است. (شکل رسم کنید و به شکل ریاضی بنویسید)

۱۴: در شکل مقابل $\widehat{AC} = 2x$ و $\widehat{BD} = 3x$ و $\angle CPB = 5x$. مقدار x را به دست آورید.

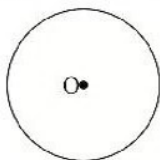


۱۵: در شکل مقابل O مرکز دایره است. $\widehat{A} = 65^\circ$ و $\widehat{B} = 35^\circ$. اندازه‌ی زاویه‌ی C را به دست آورید.



زاویه‌ی بین امتداد دو وتر:

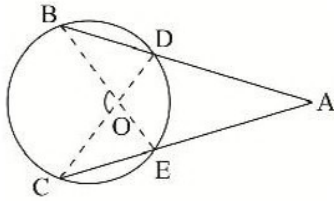
اندازه‌ی زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید، برابر نصف قدر مطلق تفاضل اندازه‌ی کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدود هستند.



(شکل رسم کنید و رابطه را بنویسید)

۱۶: در شکل مقابل $\hat{A} = 27^\circ$ و $\hat{BOC} = 71^\circ$ اندازه‌ی کمان BC را به دست آورید.

مثال



.....

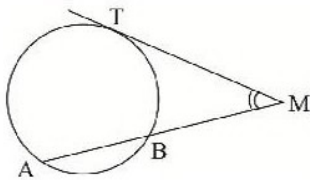
.....

.....

.....

زاویه‌ی بین مماس و وتر:

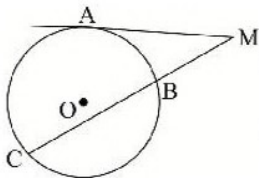
در شکل مقابل خط مماس MT بر دایره است و از M قاطع MA را بر



دایره رسم کرده‌ایم. در این صورت، $\hat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{TA} - \widehat{TB})$

۱۷: در دایره $C(0,5)$ اگر $\hat{M} = 50^\circ$ و $\widehat{BC} = 110^\circ$ ، طول کمان \widehat{AC} را به دست آورید.

مثال



.....

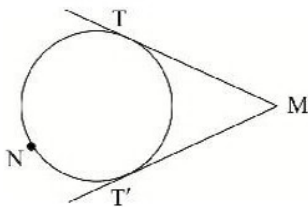
.....

.....

.....

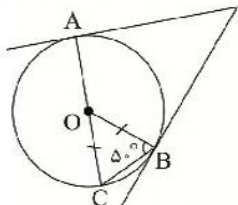
زاویه‌ی بین دو مماس: از نقطه‌ی M مماس‌های MT و MT' را بر دایره‌ی $C(0,R)$ رسم

کرده‌ایم. در این صورت $\hat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{TNT'} - \widehat{TT'})$



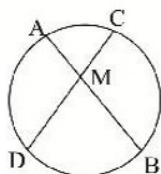


۱۸: در شکل مقابل MA و MB بر دایره‌ای به قطر AC مماس هستند. اگر $\widehat{ORC} = 80^\circ$.



اندازه‌ی زاویه‌ی M را به دست آورید.

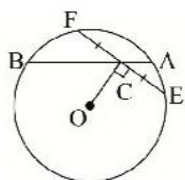
درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره



۱- دو وتر AB و CD در نقطه‌ی M داخل دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.

مطابق شکل بین قطعه‌های ایجادشده برابری زیر برقرار است:

$$MA \times MB = MC \times MD$$



مثال ۱۹: نقطه‌ی C روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر از این دایره که از نقطه‌ی C می‌گذرد را به دست آورید.

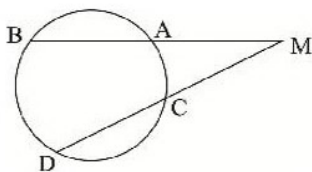
.....

.....

.....

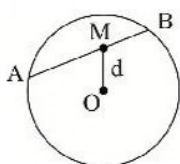
۲- دو وتر AB و CD در نقطه‌ی M در خارج دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند. مطابق شکل بین

اندازه‌ی پاره‌های حاصل برابری زیر برقرار است:



$$MA \times MB = MC \times MD$$

نقطه‌ی M درون دایره‌ی C(O,R) است و فاصله‌ی M تا مرکز دایره

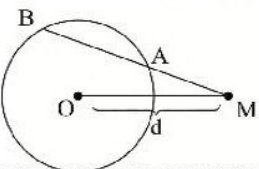


برابر d است. برای هر وتر دلخواه AB که از نقطه‌ی M می‌گذرد، می‌توان نوشت،

$$MA \times MB = R^2 - d^2$$

نکته، نقطه‌ی M خارج دایره‌ی C(O,R) است و فاصله‌ی M تا مرکز دایره برابر d است. اگر

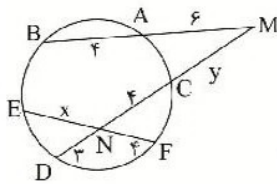
از این نقطه قاطع دلخواهی رسم کنیم تا دایره را در نقطه‌های A و B قطع کند، آنگاه



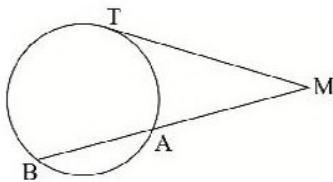
$$MA \times MB = d^2 - R^2$$

مثال

۲۰: در شکل مقابل مقدار $x+y$ را بیابید.



۳- نقطه‌ی M خارج دایره قرار دارد. از این نقطه مماس MT و قاطع M دلخواهی رسم می‌کنیم و محل برخورد این قاطع با دایره را A و B می‌نامیم.



بین اندازه پاره‌های ایجادشده برابر زیر برقرار است:

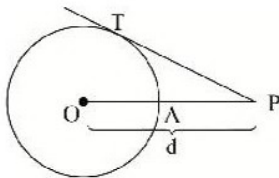
$$MT^2 = MA \times MB$$

نقطه‌ی M خارج دایره‌ی C(O, R) است. مماس MT را بر دایره رسم



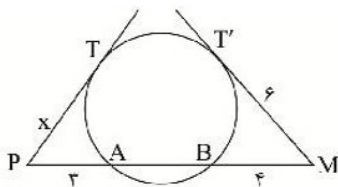
می‌کنیم. اگر فاصله‌ی M تا مرکز دایره برابر d باشد،

$$MT^2 = d^2 - R^2 \text{ آنگاه}$$



۲۱: در شکل مقابل اندازه‌ی x را به دست آورید.

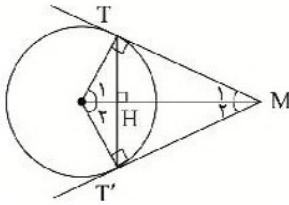
مثال



مطالبی درباره‌ی مماس بر دایره از نقطه‌ی خارج دایره

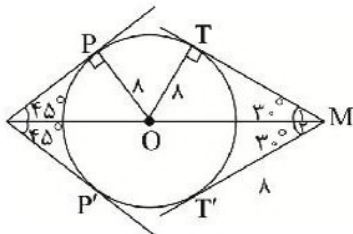
۱- اندازه‌ی دو مماس رسم شده بر یک دایره از نقطه‌ای خارج دایره باهم برابرند. به عبارت دیگر، در شکل، اگر MT و MT' مماس بر دایره باشند، آنگاه $MT = MT'$

۲- از نقطه‌ی M خارج دایره‌ی $C(O,R)$ دو مماس MT و MT' را بر دایره رسم کرده‌ایم. در این صورت دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی MOT و MOT' هم‌نهشت‌اند. در نتیجه $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ و $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ بنابراین OM نیمساز زاویه‌ی بین دو مماس است.



۳- نقطه‌ی M خارج دایره‌ی $C(O,R)$ است. از این نقطه مماس‌های MT و MT' را بر دایره رسم کرده‌ایم. چون $MT = MT'$ و $OT = OT'$ پس OM عمودمنصف TT' است.

مثال ۲۲: زاویه‌ی بین مماس‌های رسم شده از نقطه‌ی M بر دایره‌ی $C(O,8)$ برابر 60° و زاویه‌ی بین مماس‌های رسم شده از نقطه‌ی N بر دایره‌ی C برابر 90° است. بیشترین مقدار MN را به دست آورید.

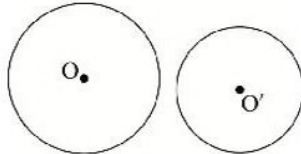


مماس مشترک دو دایره

تعریف: خطی است که بر دو دایره مماس است.

اگر دو دایره در یک طرف خط مماس مشترک باشند، به آن مماس مشترک خارجی دو دایره

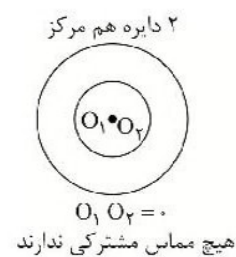
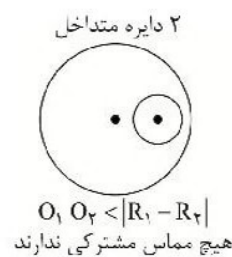
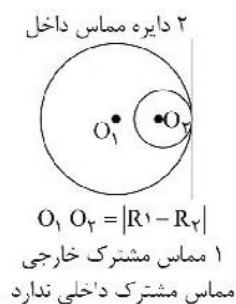
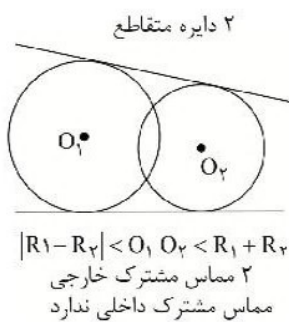
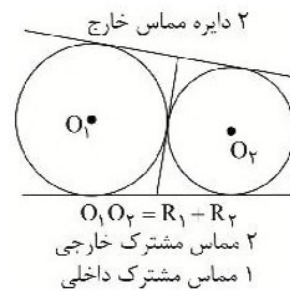
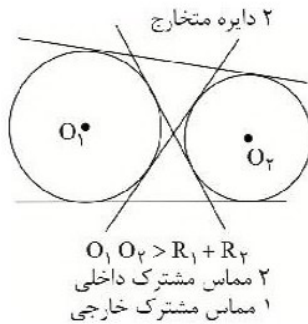
می‌گوییم.



اگر دو دایره در دو طرف خط مماس مشترک باشند، آن خط مماس مشترک داخلی دو دایره است.

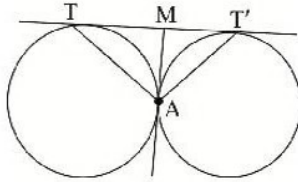
(شکل رسم کنید)

وضع دو دایره و تعداد مماس مشترک‌های آن را با رسم شکل بررسی کنید. (دو دایره متخارج)



مثال

۲۳: دو دایره در نقطه‌ی A مماس خارج هستند و TT' پاره‌خط مماس مشترک خارجی



آن‌ها است اندازه زاویه‌ی TAT' را به دست آورید.



$$TT' = \sqrt{d^2 - (R_1 - R_2)^2}$$

اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره،

$$KK' = \sqrt{d^2 - (R_1 + R_2)^2}$$

اندازه‌ی مماس مشترک داخلی دو دایره،

$O_1O_2 = d$ و شعاع دایره‌اند.

طول مماس مشترک خارجی دو دایره از طول مماس مشترک داخلی آن‌ها (در صورت وجود)

بزرگ‌تر است.

اگر دو دایره‌ی $C(O_1, R_1)$ و $C(O_2, R_2)$ مماس خارج باشند، طول مماس مشترک خارجی دو

دایره از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$T_1T_2 = 2\sqrt{R_1R_2}$$

۲۴: طول بزرگ‌ترین مماس مشترک دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۳ برابر $\sqrt{۳۹}$ است. طول

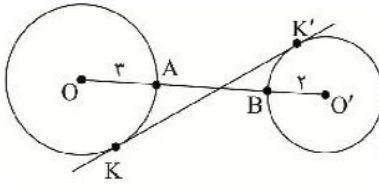
مثال

خط‌المركزین این دو دایره را به دست آورید.

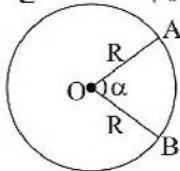
مثال

۲۵: طول مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۲ سانتی‌متر برابر ۱۲ سانتی‌متر

است. کمترین فاصله‌ی نقطه‌های این دو دایره از یکدیگر چند سانتی‌متر است؟



قطاع دایره: به قسمتی از سطح دایره که بین دو شعاع آن محدود است می‌گوییم؛ مانند قطاع



AOB

اگر زاویه‌ی مرکزی قطاعی از دایره‌ی $C(O, R)$ بر حسب درجه مساوی α



باشد، آنگاه

$$L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$$

الف) طول کمان AB برابر است با

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

ب) مساحت قطاع برابر است با

قطاعه: قسمتی از سطح دایره، محصور بین یک کمان و وتر نظیر آن کمان را قطعه‌ی دایره

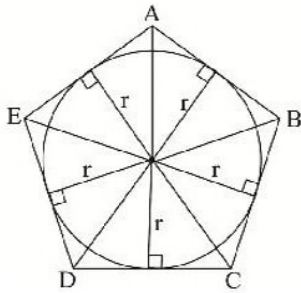
می‌گوییم.

مثال

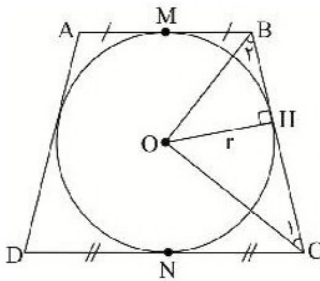
۲۶: در قطاع شکل مقابل مساحت قسمت هاشور خورده را به دست آورید.

درس سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی

هندضلعی ممیطی: یک چند ضلعی است که ضلع‌های آن بر یک دایره مماس باشند. در این صورت دایره را محاطی گویند. مرکز دایره‌ی محاطی نقطه‌ی هم‌مرسی نیمسازهاست.



۲۷: ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین $(AD = BC) ABCD$ بر دایره‌ای به شعاع r محیط است.



ثابت کنید: $4r^2 = AB \times CD$

.....

.....

.....

نتیجه: در هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین که بر دایره‌ای به شعاع r ممیط شده است، قطر دایره‌ی مماطی واسطه‌ی هندسی طول دو قاعده است؛ یعنی: $(2r)^2 = AB \times CD$

نکته

اگر در یک n ضلعی محیطی، P نصف محیط، r شعاع دایره‌ی محیطی و S مساحت n ضلعی باشد، آنگاه $r = \frac{S}{P}$

مثال

۲۸: بر دایره‌ای به شعاع r یک لوزی محیط شده است. اگر اندازه‌ی یکی از زاویه‌های لوزی

60° باشد، نسبت مساحت لوزی به مساحت دایره را به دست آورید.

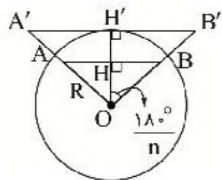
هندضلعی مماسی: یک چند ضلعی است که رأس‌های آن روی محیط دایره‌اند. در این صورت

دایره را محیطی گویند. مرکز دایره‌ای محیطی نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌ها است.

قضیه: هر چند ضلعی منتظم قابل محاط شدن در یک دایره و همچنین قابل محیط شدن بر یک

دایره است.

۱- اندازه‌ی ضلع در n ضلعی منتظم محاطی و محیطی:



n ضلعی منتظم به طول ضلع $AB = C_n$ در دایره‌ی $C(O, R)$ محاط است.

$$\text{پس: } AB = C_n = 2R \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

n ضلعی منتظم به طول ضلع $A'B' = C'_n$ بر دایره‌ی $C(O, R)$ محیط است.

$$\text{پس: } A'B' = C'_n = 2R \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

دایره‌های مماسی مثلث: هر مثلث یک دایره‌ی محاطی داخلی و سه دایره‌ی محاطی خارجی

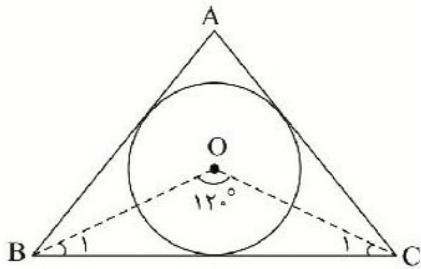
دارد.

هر دایره‌ی محاطی خارجی بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مماس است.

توجه: مرکز دایره‌ی مماسی داخلی مثلث، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث است. مرکز هر دایره‌ی مماسی خارجی مثلث، محل برخورد نیمساز یک زاویه‌ی داخلی و نیمساز دو زاویه‌ی خارجی دیگر است.

مثال ۲۹: در مثلث ABC ، اگر O مرکز دایره‌ی مماسی داخلی مثلث باشد و $\widehat{BOC} = 120^\circ$ ،

اندازه‌ی زاویه‌ی A را به دست آورید.



r شعاع دایره‌ی مماسی داخلی مثلث به مساحت S و محیط P است. در



$$r = \frac{S}{P}$$

این صورت،

مثال ۳۰: شعاع دایره‌ی مماسی داخلی مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a را به دست آورید.

در مثلث ABC ، اگر r_a اندازه‌ی شعاع دایره‌ی مماسی خارجی نظیر ضلع



BC و مساحت مثلث برابر S و محیط مثلث P باشد، آنگاه $r_a = \frac{S}{P-a}$ واضح است که

$$r_b = \frac{S}{P-b}, r_c = \frac{S}{P-c}$$

مثال

۳۱: در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a ، طول شعاع دایره‌ی محاطی خارجی را به دست آورید.

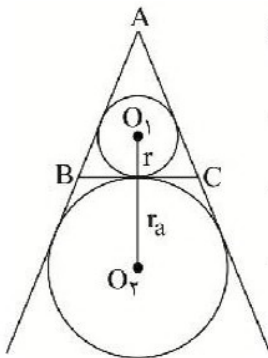


در مثلث متساوی‌الاضلاع شعاع دایره‌ی محاطی خارجی برابر طول ارتفاع

مثلث است.

مثال

۳۲: در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a ، دایره‌ی محاطی داخلی و یکی از دایره‌های محاطی خارجی آن را رسم کرده‌ایم. طول خط‌المرکزین دو دایره را به دست آورید.



دایره‌ی ممیطی مثلث: مرکز دایره‌ی محیطی مثلث، نقطه‌ی هم‌رسی عمودمتصف‌هاست.

طول شعاع دایره‌ی محیطی مثلث:

اگر در مثلث ABC ، مساحت مثلث، S و شعاع دایره‌ی محیطی R باشد، آنگاه $R = \frac{abc}{4S}$



۱. در مثلث قائم‌الزاویه، طول شعاع دایره‌ی محیطی برابر نصف طول وتر

است.

۲. در مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به طول a ، شعاع دایره‌ی محیطی برابر $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ است.

چهارضلعی ممیطن: یک چهارضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن

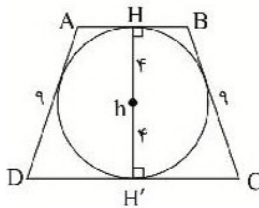
چهارضلعی هم‌مس باشد.

نکته: در هر چهارضلعی محیطی مجموع طول ضلع‌های مقابل باهم برابرند و برعکس.

مثال

۳۳: یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع ۴ محیط است. اگر طول ساق دوزنقه

۹ باشد، مساحت دوزنقه را به دست آورید.



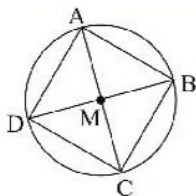
چهارضلعی مماطی: یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر عمودمنصف‌های ضلع‌های آن

چهارضلعی هم‌مس باشند.

روش‌های بررسی محاطی بودن چهارضلعی‌ها:

۱- چهارضلعی ABCD محاطی است، اگر و فقط اگر زاویه‌های مقابل مکمل باشند؛ یعنی

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

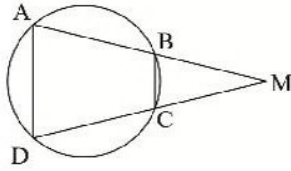


۲- در چهارضلعی ABCD، نقطه‌ی M محل برخورد قطر‌هاست.

این چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر $MA \times MC = MB \times MD$

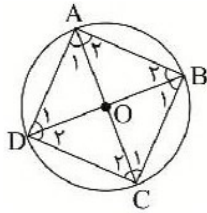
۳- در چهارضلعی $ABCD$ ، نقطه‌ی M محل برخورد امتداد دو ضلع AB و CD است. این

چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر $MA \times MB = MC \times MD$



۴- در چهارضلعی $ABCD$ ، دو قطر AC و BD را رسم کرده‌ایم. هر یک از تساوی‌های زیر برای

محاطی بودن چهارضلعی $ABCD$ کافی است.



$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \text{ یا } \hat{A}_2 = \hat{D}_2 \text{ یا } \hat{B}_2 = \hat{C}_2 \text{ یا } \hat{C}_1 = \hat{D}_1$$

توجه کنید که عکس این مطلب نیز درست است.



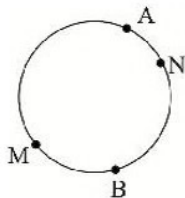
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

۱- کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

- (۱) بر هر نقطه صفحه، بی‌نهایت دایره می‌گذرد.
- (۲) بر دو نقطه صفحه، بی‌نهایت دایره می‌گذرد.
- (۳) بر سه نقطه‌ی صفحه واقع بر یک خط راست، بی‌شمار دایره می‌گذرد.
- (۴) بر سه نقطه‌ی صفحه غیرواقع بر یک خط، دقیقاً یک دایره می‌گذرد.

۲- در شکل $\widehat{AMB} = 4\widehat{ANB}$. کمان \widehat{ANB} چه کسری از محیط دایره است؟



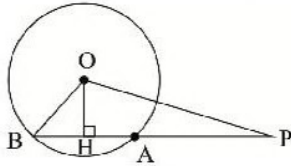
$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{6} \quad (۳)$$

۳- در شکل مقابل $OH = 1, AB = 6, \widehat{OHA} = 90^\circ$ ، شعاع دایره چه قدر است؟



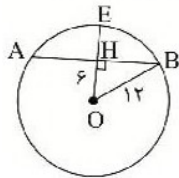
(۲) $\sqrt{13}$

(۱) $\sqrt{3}$

(۴) $\sqrt{10}$

(۳) $\sqrt{11}$

۴- در دایره‌ای با شعاع ۱۲، طول وتری که عمودمنصف شعاعی از دایره باشد، چه قدر است؟



(۲) ۲۷

(۱) $3\sqrt{13}$

(۴) $12\sqrt{3}$

(۳) $6\sqrt{3}$

۵- مثلث ABC در یک دایره محاط است و اندازه کمان‌های AB, BC, AC به ترتیب

$75^\circ, x+7^\circ, 2x-22^\circ$ است. اندازه یکی از زوایای داخلی مثلث برحسب درجه کدام

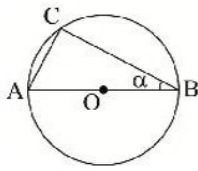
است؟

(۴) 64°

(۳) 60°

(۲) 59°

(۱) $57/7^\circ$



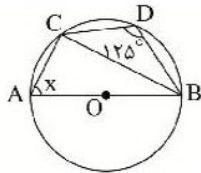
۶- در شکل روبه‌رو، $\widehat{BC} = \widehat{AC}$ هست و O مرکز دایره. زاویه α کدام

۱۸° (۲)

۲۲/۵° (۱)

۲۰° (۴)

۱۵° (۳)



۷- در شکل مقابل، O مرکز دایره است. زاویه x کدام است؟

۴۵° (۲)

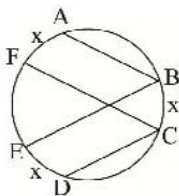
۶۵° (۱)

۷۵° (۴)

۵۵° (۳)

۸- در شکل مقابل اگر $AB \parallel FC$ و $CD \parallel BE$ و $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $\widehat{CD} = 40^\circ$ و $\widehat{EF} = 110^\circ$

باشد، آنگاه زاویه \widehat{FCD} چند درجه است؟



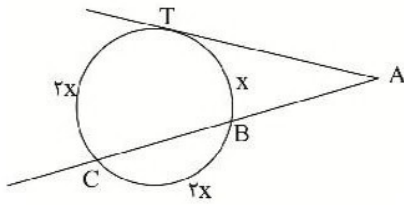
۵۵° (۲)

۹۰° (۱)

۸۰° (۴)

۷۰° (۳)

۹- در شکل، AT مماس و $\widehat{BC} = \widehat{CT} = 2\widehat{BT}$ ، زاویه \widehat{A} چند درجه است؟



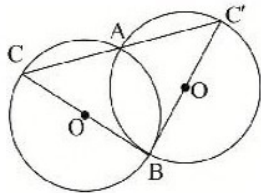
۷۲° (۲)

۱۸° (۱)

۱۴۴° (۴)

۳۶° (۳)

۱۰- در شکل مقابل دو دایره مساوی و متقاطع‌اند. قاطع CAC' را رسم می‌کنیم. مثلث CBC'

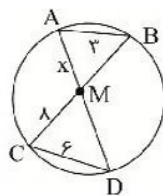


همواره ... است.

(۱) متساوی‌الاضلاع (۲) قائم‌الزاویه

(۳) متساوی‌الساقین (۴) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

۱۱- در شکل مقابل AM کدام است؟



۶ (۲)

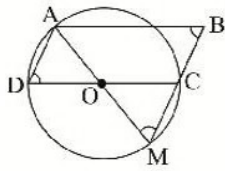
۷ (۱)

۴ (۴)

۵ (۳)

۱۲- در متوازی‌الاضلاع ABCD دایره‌ی محیطی مثلث ACD امتداد ضلع BC را در نقطه M

قطع کرده است. مثلث ABM کدام نوع است؟



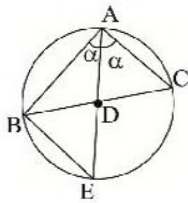
(۲) متساوی‌الساقین

(۱) متشابه ACD

(۴) قائم‌الزاویه

(۳) متساوی‌الاضلاع

۱۳- در شکل مقابل کدام گزینه نادرست است؟



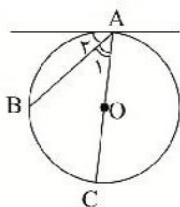
(۲) $AB \cdot AC = AD \cdot DE$

(۱) $\triangle ABE \sim \triangle ADC$

(۴) $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{DC}$

(۳) $AD^2 - AB \cdot AC = BD \cdot DC$

۱۴- در شکل مقابل اندازه زاویه ظلّی $\hat{A} = 50^\circ$. اندازه کمان \widehat{BC} برحسب درجه کدام است؟



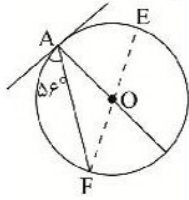
(۲) 75°

(۱) 70°

(۴) 85°

(۳) 80°

۱۵- در شکل مقابل O مرکز دایره زاویه A برابر 56° است. کمان AE چند درجه است؟



$66^\circ \quad (2)$

$68^\circ \quad (1)$

$62^\circ \quad (4)$

$64^\circ \quad (3)$

۱۶- مرکز دایره‌ای به شعاع 10 سانتی‌متر، رأس C از مثلث متساوی‌الاضلاع است و دایره از دو رأس دیگر مثلث می‌گذرد. امتداد ضلع AC دایره را در نقطه D قطع می‌کند. اندازه زاویه \widehat{ADB} کدام است؟

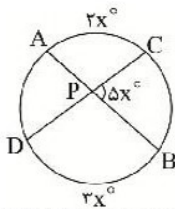
$90^\circ \quad (4)$

$60^\circ \quad (3)$

$30^\circ \quad (2)$

$15^\circ \quad (1)$

۱۷- در شکل مقابل $\widehat{AC} = 2x^\circ$ و $\widehat{BD} = 3x^\circ$ و $\widehat{CPB} = 5x^\circ$. مقدار x چند درجه است؟



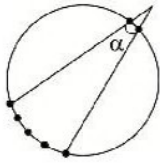
$24^\circ \quad (2)$

$20^\circ \quad (1)$

$36^\circ \quad (4)$

$32^\circ \quad (3)$

۱۸- در شکل مقابل دایره به ۲۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. زاویه α چند درجه است؟



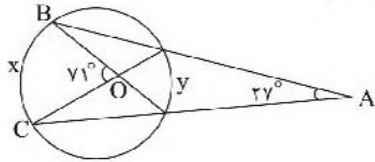
(۲) 25°

(۱) $22/5^\circ$

(۴) 30°

(۳) $27/5^\circ$

۱۹- در شکل مقابل $\widehat{A} = 27^\circ, \widehat{O} = 71^\circ$ کمان \widehat{BC} چند درجه است؟



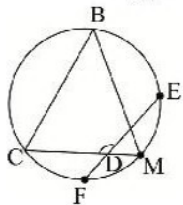
(۲) 100°

(۱) 98°

(۴) 104°

(۳) 102°

۲۰- در شکل مقابل، M وسط کمان \widehat{EF} است و $BC = 50^\circ$ ، اندازه $\widehat{B} + \widehat{D}$ چند درجه است؟



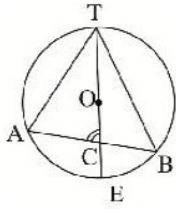
(۲) 175°

(۱) 160°

(۴) 230°

(۳) 180°

۲۱- در شکل مقابل O مرکز دایره و $\widehat{A} = 65^\circ$, $\widehat{B} = 35^\circ$ زاویه C چند درجه است؟



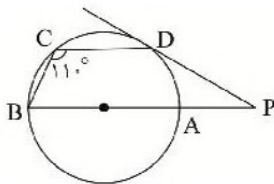
۶۱° (۲)

۶۰° (۱)

۶۳° (۴)

۶۲° (۳)

۲۲- در شکل داده شده اگر AB قطر دایره و $\widehat{C} = 110^\circ$ باشد، آنگاه زاویه P چه قدر است؟



۶۰° (۲)

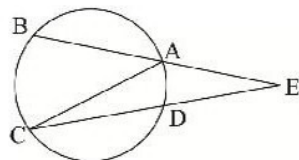
۵۰° (۱)

۵۵° (۴)

۴۵° (۳)

۲۳- در شکل داده شده، $\widehat{E} = 40^\circ$ و کمان‌های \widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CD} دارای طول‌های برابر هستند. اندازه‌ی

\widehat{ACD} کدام است؟



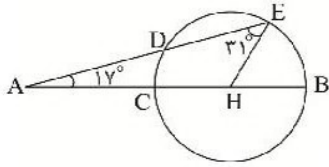
۱۵° (۲)

۱۰° (۱)

۳۰° (۴)

۲۰° (۳)

۲۴- در شکل مقابل $\hat{A} = 17^\circ$, $\hat{E} = 31^\circ$ و H وسط قطر CB می‌باشد. کمان CD چند درجه است؟



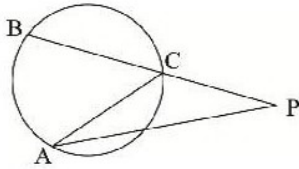
۱۹° (۲)

۱۴° (۱)

۲۴° (۴)

۲۲° (۳)

۲۵- اگر زاویه $\hat{P} = 32^\circ$ و مثلث ACP متساوی الساقین به رأس \hat{C} باشد، کمان AB چند درجه است؟



۷۴° (۲)

۶۹° (۱)

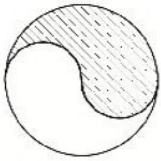
۱۲۸° (۴)

۸۶° (۳)

محیط و مساحت در دایره:

۲۶- ناحیه‌ی رنگی شکل داده‌شده از یک طرف به نیم دایره‌ای به شعاع R و از طرف دیگر به دو نیم

دایره با شعاع‌های برابر محدود است، محیط این ناحیه کدام است؟



$$\pi R^2 \quad (۴)$$

$$۲\pi R \quad (۳)$$

$$\frac{۳\pi}{۲} R \quad (۲)$$

$$\pi R \quad (۱)$$

۲۷- اگر طول یک کمان ۶۰° از دایره $C_۱$ با طول کمان ۴۵° از دایره $C_۲$ برابر باشد، آنگاه نسبت

مساحت دایره $C_۱$ به مساحت دایره $C_۲$ کدام است؟

$$\frac{۳}{۴} \quad (۴)$$

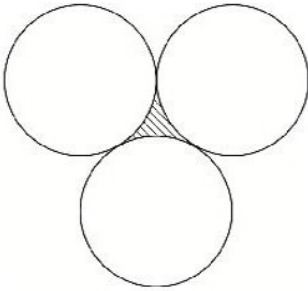
$$\frac{۴}{۳} \quad (۳)$$

$$\frac{۹}{۱۶} \quad (۲)$$

$$\frac{۹}{۴} \quad (۱)$$

۲۸- سه دایره، هر کدام به شعاع ۱ دویله دو با هم مماس خارج‌اند. مساحت ناحیه محصور بین این سه

دایره کدام است؟



$$\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (۲)$$

$$\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \quad (۴)$$

$$2\sqrt{3} - \pi \quad (۱)$$

$$2\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \quad (۳)$$

۲۹- دایره‌ی C_1 از مرکز دایره C_2 گذشته و بر آن مماس است. اگر مساحت دایره C_1 ، ۴ سانتی‌متر

مربع باشد، آنگاه مساحت دایره C_2 برحسب سانتی‌متر کدام است؟

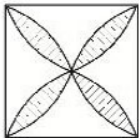
$$16\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$16 \quad (۳)$$

$$8\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$8 \quad (۱)$$

۳۰- در شکل مقابل، اگر ضلع مربع ۲ واحد باشد، مساحت قسمت رنگی کدام است؟



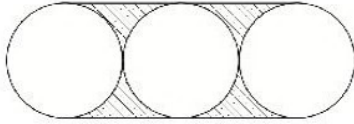
$$\pi - 2 \quad (۲)$$

$$\pi + 1 \quad (۱)$$

$$2\pi - 4 \quad (۴)$$

$$2\pi + 1 \quad (۳)$$

۳۱- سه دایره مساوی به شعاع R مطابق شکل به هم مماس اند و مراکز آنها روی یک خط راست است. سطح رنگ شده چقدر است؟



$$2R(4 - \pi) \quad (2)$$

$$R^2(4 - \pi) \quad (1)$$

$$2R^2(4 - \pi) \quad (4)$$

$$R^2(8 - \pi) \quad (3)$$

۳۲- محیط دایره ۱۰۰ سانتی متر است. طول ضلع مربع محاط در این دایره برحسب سانتی متر کدام است؟

$$\frac{100\sqrt{2}}{\pi} \quad (4)$$

$$\frac{100}{\pi} \quad (3)$$

$$\frac{50\sqrt{2}}{\pi} \quad (2)$$

$$\frac{25\sqrt{2}}{\pi} \quad (1)$$

۳۳- در دایره‌ای به مساحت $4\pi\sqrt{3}$ مثلث متساوی‌الاضلاعی محاط شده است. مساحت مثلث کدام است؟

$$9 \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

$$7/5 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

۳۴- در مثلث متساوی‌الاضلاع مساحت دایره محیطی چند برابر مساحت دایره محاطی داخلی است؟

$$3\sqrt{3} \quad (4)$$

$$2\sqrt{3} \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

۳۵- شعاع دایره‌ی محاطی بیرونی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $8\sqrt{3}$ کدام است؟

$$15 \quad (4)$$

$$12 \quad (3)$$

$$9 \quad (2)$$

$$81 \quad (1)$$

۳۶- از نقاط C, B, A خارج دایره به شعاع ۲ سه مماس AT, BT', CT'' به طول‌های $2\sqrt{3}$ رسم

شده‌اند. اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، مساحت مثلث چه قدر است؟

$$12\sqrt{3} \quad (4)$$

$$18\sqrt{3} \quad (3)$$

$$24\sqrt{3} \quad (2)$$

$$36\sqrt{3} \quad (1)$$

۳۷- در مثلث متساوی الاضلاع به طول $\sqrt{3}$ واحد، طول خط المركزين دو دایره محیطی و محاطی خارجی آن کدام است:

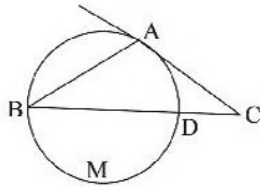
$$\frac{5}{2} \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۳۸- در شکل مقابل مماس AC بر دایره با وتر AB از دایره بربايند. اگر کمان \widehat{DMB} برابر 222° درجه باشد، زاویه \hat{C} چند درجه است؟



$$22 \quad (2)$$

$$21 \quad (1)$$

$$24 \quad (4)$$

$$23 \quad (3)$$

۳۹- مثلثی بر دایره به شعاع r محیط است. اگر محیط مثلث P و مساحت آن K باشد، آنگاه $\frac{P}{K}$ کدام است؟

$$\frac{2}{\sqrt{r}} \quad (4)$$

$$\frac{r}{2} \quad (3)$$

$$\frac{2}{r} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{r} \quad (1)$$

۴۰- در مثلثی به ضلع‌های ۸ و ۱۵ و ۱۷ دایره‌ای محاط می‌شود، شعاع این دایره برابر است با:

- (۱) ۶ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) ۳

۴۱- وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۱۰ سانتی‌متر و شعاع دایره‌ی محاطی آن ۱ سانتی‌متر است. محیط این

مثلث چند سانتی‌متر است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۲۲ (۳) ۲۴ (۴) ۲۶

۴۲- قطر دایره‌ی محیطی مثلث ABC برابر 20 و ضلع $AB = 10\sqrt{3}$ است. زاویه C چند درجه

است؟

- (۱) 60° (۲) 90° (۳) 45° (۴) 150°

۴۳- در مثلث ABC داریم $\hat{B} = 50^\circ$ و $\hat{C} = 60^\circ$ نیمساز داخلی زاویه A و عمود منصف ضلع BC

در نقطه M متقاطع‌اند. زاویه MBC چند درجه است؟

- (۱) 25° (۲) 30° (۳) 35° (۴) 40°

۴۴- دایره‌ای در مثلثی به ضلع‌های ۸ و ۱۳ و ۱۷ محاط است. نقطه‌ی تماس دایره محاطی داخلی با ضلع به طول ۸، این ضلع را به دو پاره‌خط به طول‌های x و y تقسیم می‌کند که $x < y$ است.

نسبت $\frac{x}{y}$ کدام است؟

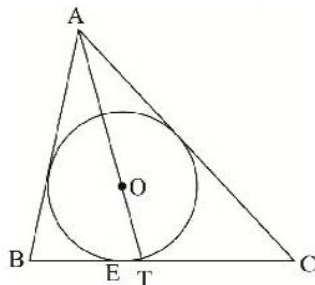
$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

۴۵- در مثلث ABC در شکل زیر $AB = 5, AC = 6, BC = 7$ می‌باشد و E محل تماس دایره محاطی داخلی با ضلع BC است و AT از مرکز دایره می‌گذرد. ET کدام است؟



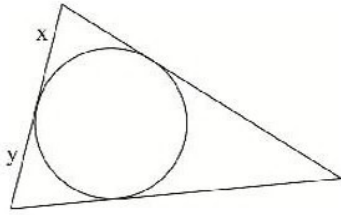
$$\frac{2}{11} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

۴۶- دایره محاطی داخلی یک مثلث به طول اضلاع ۱۳ و ۹ و ۸ در نقطه تماس، کوچک‌ترین ضلع را به ۲ قطعه تقسیم می‌کند، نسبت آن دو قطعه کدام است؟



$$\frac{2}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3}{7} \quad (3)$$

۴۷- در مثلثی به طول اضلاع ۷ و ۵ و ۳ واحد، دایره محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است نقطه تماس متوسط را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

$$\frac{2}{9} \quad (4)$$

$$\frac{1}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{6} \quad (2)$$

$$\frac{1}{9} \quad (1)$$

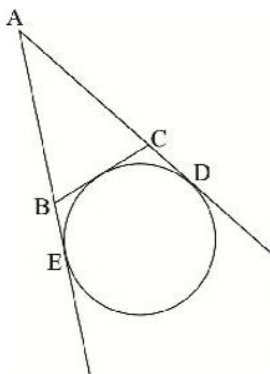
۴۸- در شکل مقابل اگر $AD = 20$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟

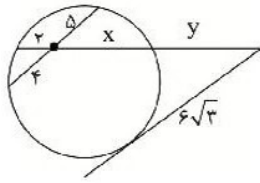
$$40 \quad (2)$$

$$42 \quad (1)$$

(۴) قابل محاسبه نیست

$$40/5 \quad (3)$$





۴۹- در شکل داده شده مقدار y کدام است؟

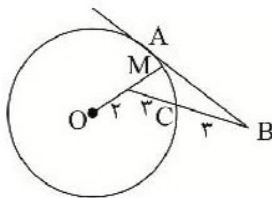
(۲) $7/5$

(۱) ۶

(۴) ۹

(۳) ۸

۵۰- در شکل داده شده AB در A بر دایره به مرکز O مماس است. D نقطه‌ای است داخل دایره و DB در C با دایره برخورد کرده است. اگر $OD = 2, BC = DC = 3, AB = 6$ آنگاه شعاع دایره کدام است؟



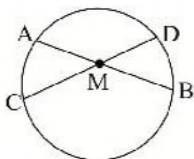
(۲) $\frac{9}{2}$

(۱) $2\sqrt{5}$

(۴) $\frac{15}{\pi}$

(۳) $\sqrt{22}$

۵۱- در شکل مقابل $MA = 6, MB = 3, MD = 2/5$ طول MC کدام است؟



(۲) $6/9$

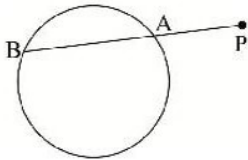
(۱) $17/1$

(۴) $7/2$

(۳) ۷

۵۲- در شکل مقابل $PA = 5$ و $AB = 3$ و شعاع دایره برابر ۴ واحد است. فاصله نقطه P تا مرکز

دایره کدام است؟



(۲) $2\sqrt{14}$

(۱) $2\sqrt{21}$

(۴) $3\sqrt{7}$

(۳) $4\sqrt{7}$

۵۳- فاصله دورترین نقطه دایره از نقطه P برابر ۹ سانتی‌متر و فاصله P تا مرکز دایره $\frac{13}{4}$ سانتی‌متر

است. طول مماس مرسوم از نقطه P بر دایره چه قدر است؟

(۴) $\sqrt{6}$

(۳) $\sqrt{13}$

(۲) ۶

(۱) $3\sqrt{2}$

۵۴- نزدیک‌ترین و دورترین فاصله A از یک دایره به ترتیب ۱۲,۸ است، شعاع دایره کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۶

(۲) ۲

(۱) ۳

۵۵- کم‌ترین و بیشترین فاصله نقطه A از محیط دایره به ۹٫۵ است. طول مماسی که از نقطه A بر دایره رسم شده، چند برابر شعاع دایره است؟

(۱) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ (۲) $3\sqrt{5}$ (۳) $6\sqrt{5}$ (۴) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

۵۶- از نقطه M واقع در خارج دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس MA, MB دایره رسم شده است. اگر فاصله نقطه M تا نزدیک‌ترین نقطه دایره $4(\sqrt{2}-1)$ باشد، فاصله مرکز دایره از وتر AB کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۳

۵۷- از نقطه A خارج از دایره به شعاع r مماسی بر دایره رسم شده که (طول مماس) $\frac{4}{3}$ شعاع r است. کوتاه‌ترین فاصله A از دایره کدام است؟

(۱) $\frac{r}{2}$ (۲) r (۳) $\frac{L}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}L$

۵۸- دو دایره به شعاع‌های $R = \sqrt{3} + 2$, $R' = 3\sqrt{3} + 2$ و طول خط‌المركزین $d = 2\sqrt{3}$ ، نسبت به هم چه وضعی دارند؟

- (۱) متخارج (۲) مماس خارج (۳) مماس داخلی (۴) متداخل

۵۹- در دو دایره $C(O, 3\sqrt{2})$, $C'(O', 2\sqrt{3})$ طول خط‌المركزین برابر با ۸ است. این دو دایره چند مماس مشترک دارند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۰- در دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ و طول خط‌المركزین $\sqrt{5}$ است. چند خط می‌توان رسم کرد که بر هر دو دایره مماس باشد؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۶۱- دو دایره به شعاع‌های $m+3$ و $2m-1$ و طول خط‌المركزین $5m-2$ دقیقاً سه مماس مشترک دارند. مقدار m چقدر است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

 $\frac{3}{2}$ (۲)

۱ (۱)

۶۲- دو دایره به شعاع‌های R_1, R_2 و طول خط‌المركزین d ، رابطه‌ی $3R_1 + 4R_2 = 4d$ و $R_1 + 2R_2 = \frac{11}{6}d$ برقرار است. چند خط وجود دارد که بر هر دو دایره مماس است؟

۲ (۴)

۴ (۳)

۱ (۲)

هیچ (۱)

۶۳- طول خط‌المركزین دو دایره مماس داخل برابر ۴ است. اگر مساحت ناحیه محدود بین آن‌ها مساوی 32π باشد، نسبت شعاع‌های این دو دایره برابر کدام است؟

۳ (۴)

 $\sqrt{6}$ (۳)

۶ (۲)

 $\sqrt{3}$ (۱)

۶۴- دو دایره به شعاع‌های $4, 5/10$ واحد مماس بیرون‌اند. از مرکز دایره کوچک‌تر، مماسی بر دایره بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعه مماس چقدر است؟

- (۱) ۸ (۲) $4\sqrt{5}$ (۳) $4\sqrt{6}$ (۴) ۱۰

۶۵- در چه صورت طول پاره‌خط مماس مشترک خارجی دو دایره مساوی طول خط‌المركزین دو دایره است؟

- (۱) دو دایره متخارج باشند (۲) دو دایره مماس بیرونی باشند
(۳) دو دایره متقاطع باشند (۴) دو دایره مساوی باشند

۶۶- دو دایره با شعاع‌های مساوی مماس خارج هستند. چهارضلعی $ABCD$ که CD, AB دو قطر موازی از دو دایره‌اند، کدام است؟

- (۱) لوزی (۲) مستطیل (۳) متوازی‌الاضلاع (۴) مربع

چندضلعی‌های محاطی و محیطی

۶۷- دو زاویه‌ی مجاور یک چهارضلعی محاطی 80° ، 120° است، قدر مطلق تفاضل دو زاویه دیگر چه قدر است؟

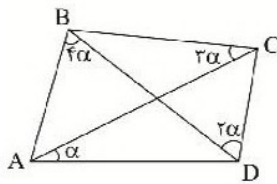
30° (۴)

50° (۳)

40° (۲)

20° (۱)

۶۸- چهارضلعی محاطی ABCD مطابق شکل مفروض است. زاویه رأس D از مثلث ABD کدام است؟



54° (۲)

48° (۱)

36° (۴)

60° (۳)

۶۹- در چهارضلعی محیطی ABCD حاصل $AB + CD = 8$ است. محیط چهارضلعی کدام است؟

20 (۴)

24 (۳)

16 (۲)

32 (۱)

۷۰- اگر $AB = a + 1$ و $BC = 4a - 3$ و $CD = 2a + 2$ و $DA = a + 3$ ضلع‌های متوالی یک چهارضلعی محیطی باشند، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۱- سه نیمساز داخلی یک چهارضلعی از یک نقطه می‌گذرند؛ و اندازه سه ضلع متوالی آن ۵ و ۷ و ۸ است، اندازه ضلع چهارم کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) $7/5$ (۴) ۹

۷۲- چهارضلعی $ABCD$ را بر دایره‌ای به مرکز O محیط کرده‌ایم، مجموع زاویه‌های $\widehat{A\hat{O}B}$ ، $\widehat{C\hat{O}D}$ کدام است؟

- (۱) 90° (۲) 180° (۳) 120° (۴) 240°

۷۳- کدام یک از چهارضلعی‌های زیر محاطی است، ولی لزوماً محیطی نیست؟

- (۱) دوزنقه (۲) مربع (۳) مستطیل (۴) لوزی

۷۴- نیمسازهای زاویه‌های یک دوزنقه را رسم می‌کنیم و از برخوردشان یک چهارضلعی به دست می‌آید. این چهارضلعی

- (۱) مربع است (۲) مستطیل است (۳) لوزی است (۴) محاطی است

۷۵- برای آن که یک چهارضلعی محدب، قابل محاط شدن در یک دایره باشد، کافی است:

- (۱) همه ضلع‌هایش برابر باشند (۲) همه زاویه‌هایش برابر باشند
(۲) مرکز تقارن داشته باشد. (۳) منتظم باشد.

۷۶- کدام گزینه همواره صحیح است؟

- (۱) اگر در چهارضلعی محاطی یک زاویه قائم باشد، چهارضلعی مستطیل است.
(۲) اگر یک چهارضلعی، محاطی و محیطی باشد، مربع است.
(۳) اگر چهارضلعی محیطی دو ضلع مجاورش مساوی باشد، لوزی است.
(۴) اگر در یک چهارضلعی محدب، یک قطر عمودمنصف قطر دیگر باشد، محیطی است.

۷۷- اوساط اضلاع مستطیلی را به طور متوالی به هم وصل می کنیم، چهارضلعی حاصل

(۱) محاطی است (۲) محیطی و محاطی است

(۳) نه محیطی و نه محاطی است (۴) محیطی است

۷۸- در مورد دوزنقه متساوی الساقین کدام گزینه درست است؟

(۱) نه محاطی نه محیطی است (۲) همواره محیطی است

(۳) هم محاطی و هم محیطی است (۴) همواره محاطی است.

۷۹- یک دوزنقه متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع $R = 3$ محیط است. اگر مساحت دوزنقه ۴۵

واحد مربع باشد، طول ساق آن کدام است؟

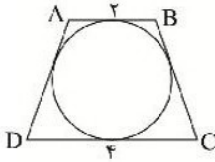
(۱) ۷ (۲) $7/5$ (۳) ۸ (۴) $8/5$

۸۰- یک دوزنقه متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع $\sqrt{3}$ مماس است و یکی از زاویه های دوزنقه

120° است محیط دوزنقه کدام است؟

(۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۱۶ (۴) ۱۲

۸۱- در شکل مقابل دوزنقه متساوی الساقین ABCD بر دایره محیط است. مساحت آن کدام است؟



(۲) ۶

(۱) $6\sqrt{2}$

(۴) ۸

(۳) $8\sqrt{2}$

۸۲- دوزنقه متساوی الساقین به طول قاعده‌های $\frac{32}{3}$ و ۶ واحد بر دایره‌ای محیط است. کوتاه‌ترین فاصله

رأس دوزنقه تا نقاط دایره، چند واحد است؟

(۴) $\sqrt{3}$

(۳) ۱

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۱) $\frac{1}{2}$

۸۳- دوزنقه متساوی الساقین $(AD = BC)ABCD$ بر دایره‌ای به شعاع R محیط است، کدام رابطه

صحیح است؟

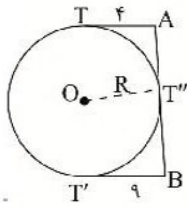
(۲) $AB^2 + AC^2 = 4R^2$

(۱) $AB \times CD = 4R^2$

(۴) $AB \times CD = 2R^2$

(۳) $AB + CD = 4R$

۸۴- در شکل داده شده BT, AT با هم موازی‌اند و به ترتیب در T', T بر دایره‌ای به شعاع R مماس هستند و AB نیز در T'' بر دایره مماس است، R کدام است؟



(۱) $\frac{25}{6}$

(۲) ۶

(۳) ۴

(۴) با اطلاعات مسئله قابل محاسبه نیست

۸۵- دوزنقه قائم‌الزاویه‌ای بر یک دایره به شعاع ۴ محیط است، اگر طول ساق غیر قائم برابر ۱۷ باشد، مساحت دوزنقه کدام است؟

(۱) ۵۴

(۲) ۴۸

(۳) ۴۲

(۴) ۱۰۰
